

PRACTICAL SOLUTIONS OF EDDY
CURRENT PROBLEMS BY FINITE ELEMENTS

O.W. Andersen
Norwegian Inst. of Technology
Electrical Engineering Dept.
7034 Trondheim, Norway

K.G. Fehrle
General Electric Company
6901 Elmwood Avenue
Philadelphia, PA 19142, USA

ABSTRACT

A computer program is described, which is capable of solving easily a large number of eddy current problems, arising in electric power engineering. Both flat and axi-symmetric two dimensional problems can be handled, and restrictions can be placed on the total eddy currents flowing in the conductors. The greater insight into the nature of such problems which is gained by more accurate calculations is often reflected in the designs themselves, and some examples of this are presented.

1. INTRODUCTION

Reference 1 describes a finite element computer program for solution of the magnetic diffusion equation:

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu \gamma (j_0 \vec{A} - \vec{U})$$

One of the novel features of this program is the way the curl free vector field $\vec{U}$ (often an applied voltage) is determined from linear relationships between voltages and induced currents. This makes it possible to solve easily a large number of practical problems, in which restrictions are placed on the total eddy currents flowing in the conductors.

2. AUTOMATIC GRID GENERATION

It is essential that computer programs which are designed to solve practical everyday problems for the industry are sufficiently easy to use. Great emphasis has been placed on this, both in the present program, and in other field programs, which have been made earlier (Ref. 2, 3 and 4). A high degree of automatic grid generation is necessary in a finite element program in order to achieve this. The way this is done is described in more detail in Ref. 2 and 3, and only a brief review will be given here.

The program user decides on an initial grid, which is made up of horizontal and vertical lines. As input to the program he must give the numbers and locations of so-called grid density break lines, which in the example in Fig. 1 are vertical lines 1, 7 and 14, and horizontal lines 1, 17 and 20. Also, he must give a description of the contour lines and the boundary conditions. The entering of contour lines is simplified by preprogrammed shapes, built into the

program. Both the circular arc and the rectangle with horizontal and vertical sides in Fig. 1 are such shapes. The resultant grid, which the program generates from this information, is shown in Fig. 2.

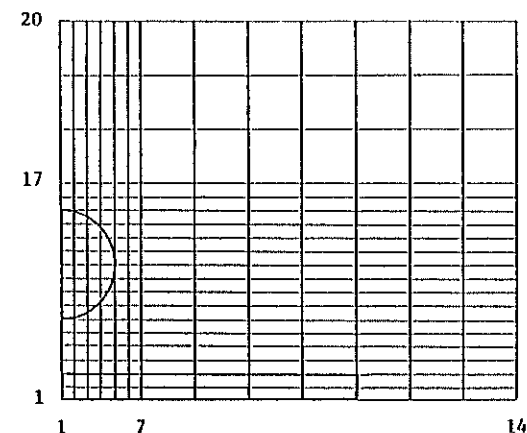


Fig.1. Cylindrical conductor above plate.
Initial grid.

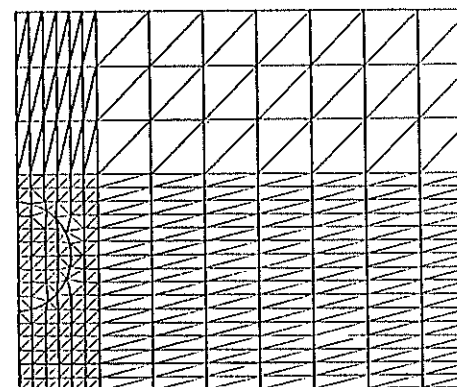


Fig.2. Cylindrical conductor above plate.
Final grid.

3. A TRANSFORMER PROBLEM

In most transformers the windings can be considered to carry uniform current, and eddy currents generated within the small strands do not have any appreciable effect on the magnetic leakage field (Ref. 4). But this is not at all true if one of the windings is an aluminum sheet winding.

In this case the problem is axi-symmetric, and each of the six turns in the sheet winding is forced to carry the same current, because of the series connection. Eddy currents are generated within the conductors which tend to make the magnetic field through the winding almost purely axial.

Fig. 3 shows a design with equal lengths of the two windings. The maximum current density in the end of the inner turn is 2.66 times the average value.

In Fig. 4 the sheet winding is made longer. This tends to reduce the amount of induced eddy currents required to straighten the field, and the calculated maximum current density is now only 1.65 times the average.

The program makes it possible to calculate accurately the optimum axial displacement of the two winding ends, and at the same time to judge accurately the adverse effect on the axial forces in the high voltage winding. The eddy current loss in the tank can also be estimated.

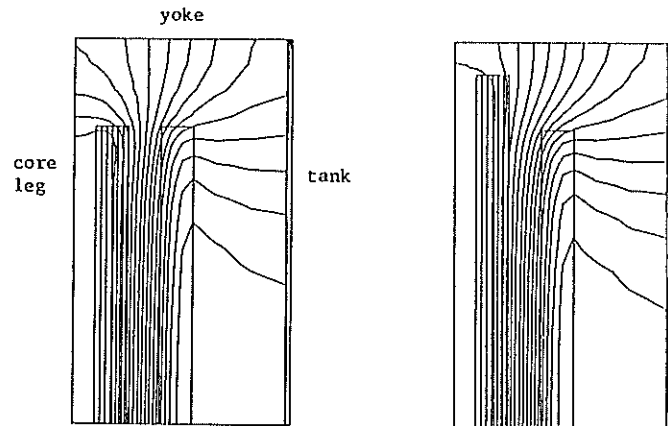


Fig.3

Transformers with aluminum sheet winding.

Fig.4

4. A ROTATING MACHINERY PROBLEM

In some synchronous generators the amortisseur winding carries current continuously. This is true for example if the generator has an unsymmetrical load, or if the load is dc through a rectifier. In such machines the amortisseur bars are sometimes made up of insulated segments. The bars are twisted, so that each segment is forced to carry the same total current, but with non uniform distribution within each segment.

Calculations are made for the two extreme positions of the segments shown in Fig. 5, and the resultant resistance and inductance are taken as averages from the two calculations.

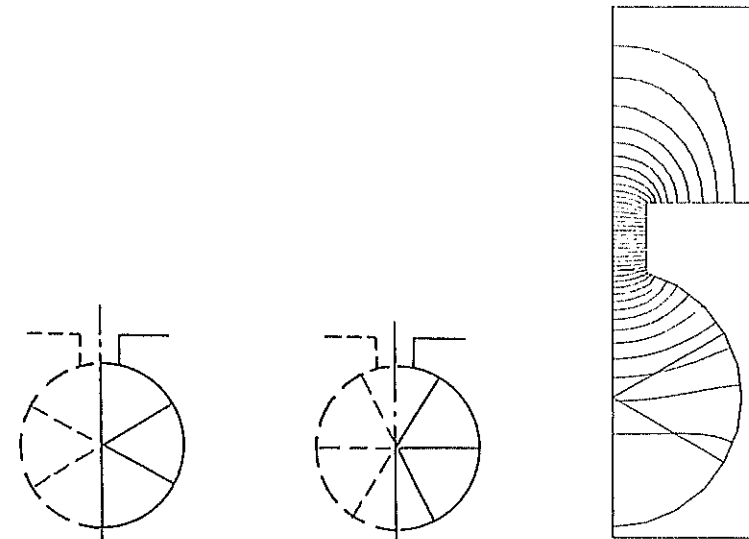


Fig.5. Segmented amortisseur bar.

5. A BUSBAR PROBLEM

Fig. 7 shows a flux plot for a three phase busbar arrangement, where eddy currents are induced both within the solid busbars and in an adjacent plate. Total currents are specified in each busbar, and in the plate the total current must be zero.

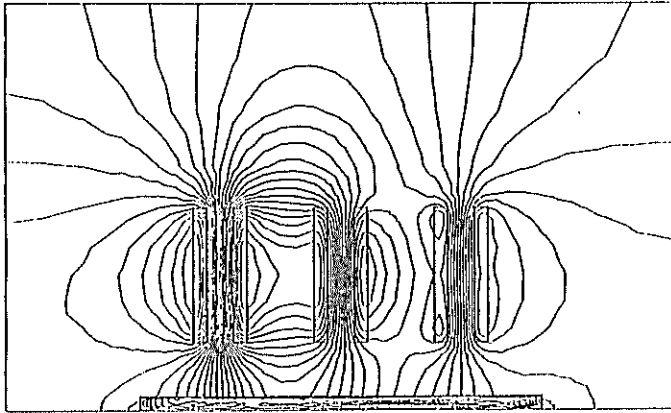


Fig.7. Busbars above plate.

Losses are calculated in each conductor as $\Sigma I^2 r$ for all the triangular elements, and in each phase as $\text{Re}[\dot{U}I^*]$. With a sufficiently fine subdivision into elements, the sum of the losses calculated both ways will come out same, within numerical accuracy.

Forces on the busbars and the impedance per meter length for each phase are parts of the normal program output.

6. A BREAKER PROBLEM

Fig. 8 shows a current carrying conductor inside a cylindrical steel tank, where eddy currents are induced with a depth of penetration of about 1.2 mm. This makes it impractical to use an initial grid with horizontal and vertical lines, and the program can therefore also have the initial grid consisting of radial lines and circular arcs, as shown in Fig. 9.

The purpose of the unmagnetic steel insert is of course to interrupt the otherwise high permeability flux path through the tank. The copper bar provides a high conductivity path for return eddy currents, which would otherwise have to flow through the steel. The condition which determines the voltage $\dot{U}$ in the diffusion equation is now that the sum of the induced eddy currents in the magnetic steel tank, the unmagnetic steel insert and the copper bar should be zero.

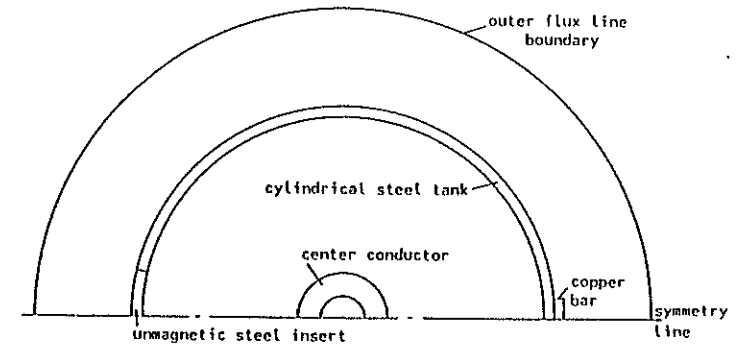


Fig.8. Conductor in steel tank

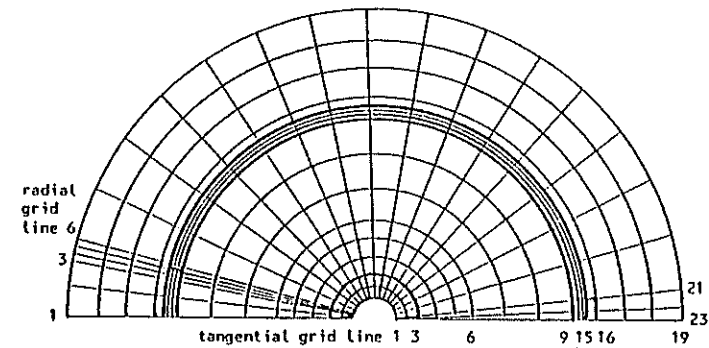


Fig.9. Initial polar coordinate grid.

7. REFERENCES

1. O.W. Andersen, "Finite Element Solution of Skin Effect and Eddy Current Problems", IEEE Paper A77616-6, presented in Mexico City, July 1977.
2. O.W. Andersen, "Laplacian Electrostatic Field Calculations by Finite Elements with Automatic Grid Generation", IEEE Transactions, vol. PAS-92, Sep./Oct.1973, pp. 1485-1492.

3. O.W. Andersen and K.G. Fehrle, "Electrostatic Field Calculations Using Finite Element Methods", International Conference on Numerical Methods in Electrical and Magnetic Field Problems, St. Margherita, Italy, 1976.
4. O.W. Andersen, "Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method", IEEE Transactions, vol. PAS-92, March/April 1973, pp.682-689.

CALCUL DES GRANDEURS ELECTROMAGNETIQUES, THERMIQUES
ET MECANIKES LORS DU DEMARRAGE ASYNCHRONES DES MACHINES
SYNCHRONES A POLES SAILLANTS MASSIFS. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

Ph. BARRET et Y. COLOT — E.D.F. Etudes et Recherches — Service
Matériel Electrique

J. PLANCHARD et Mme D. HUTZLER — E.D.F. Etudes et Recherches —
Service Informatique et Mathématiques
Appliquées

J.Y. VIDAN — E.D.F. Direction de l'Équipement

Le calcul du régime asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs concerne, entre autres, la prédétermination du démarrage direct sur le réseau des groupes réversibles destinés à l'accumulation d'énergie par pompage et à sa restitution par turbinage. On expose la méthode de calcul du comportement électromécanique du groupe, faisant notamment intervenir la résolution locale du champ électromagnétique dans l'entrefer et dans le fer massif en régime saturé. Le programme se poursuit par la détermination des puissances localement dissipées dans les pôles, puis des températures, et enfin des contraintes mécaniques. La comparaison entre les résultats du calcul et des essais est faite pour deux groupes réversibles dont les puissances nominales sont respectivement 72 MVA et 64 MVA.

1. INTRODUCTION

La consommation d'énergie électrique varie très notablement en fonction des heures de la journée, des jours de la semaine et des saisons. En l'absence de stockage d'énergie, qui n'est de toutes façons pas réalisable sous forme électrique, il serait donc nécessaire de s'équiper en moyens de production de puissance totale au moins égale à la puissance appelée à l'instant de la plus forte consommation, d'où il résulterait évidemment que certaines unités de production ne seraient utilisées que très peu d'heures dans l'année. Le stockage d'énergie permet de pallier cet inconvénient en utilisant les unités de production disponibles aux moments de faible consommation (heures creuses) pour accumuler de l'énergie et en la restituant aux moments de forte consommation (heures de pointe), économisant l'investissement des unités de production marginales.

La version la plus répandue de stockage consiste à utiliser la différence de niveau entre deux réservoirs, en pompant de l'eau en heures creuses et en la turbinant en heures pleines. La machine électrique utilisée est une machine synchrone, qui peut aussi bien fonctionner en moteur qu'en générateur. Son sens de rotation ne sera le même dans les deux modes de fonctionnement que si, sur son arbre, sont accouplées une turbine et une pompe distinctes, solution extrêmement coûteuse, notamment au point de vue génie civil. On préfère généralement ne lui accoupler qu'une seule machine appelée "turbine-pompe", mais alors, le sens de rotation étant opposé en turbinage et en pompage, il faut prévoir le démarrage du groupe, en moteur et pompe, à partir de la vitesse nulle. Les solutions possibles sont :

- l'utilisation d'un moteur de lancement de faible puissance dit "moteur poney"
- le démarrage à fréquence progressive à l'aide d'un convertisseur statique de fréquence ou d'un autre groupe fonctionnant en alternateur à vitesse variable
- la solution la plus souple et la plus économique consiste à démarrer la machine synchrone comme un moteur asynchrone, en la connectant directement au réseau électrique.

C'est cette dernière solution qui fait l'objet de la présente communication.

La technologie classique pour les moteurs synchrones démarrant en asynchrone consiste à réaliser le circuit magnétique du rotor en tôles feuilletées et à le munir d'une cage d'amortisseurs analogue à la cage d'écureuil des moteurs asynchrones. Cette technique n'est pas applicable aux groupes de pompage, du moins au-delà d'une certaine puissance, car l'énergie calorifique dissipée par effet Joule dans la cage d'amortisseurs devient prohibitive. Les pôles du

rotor sont alors réalisés en acier massif, sans amortisseurs ; les courants lors du démarrage asynchrone circulent dans les pôles eux-mêmes, qui présentent à l'égard de l'effet Joule une bien plus grande capacité calorifique. La fermeture des courants de pôle à pôle est souvent facilitée par des connexions en cuivre de forte section ; nous nous sommes placés dans ce cas, qui correspond en particulier aux deux machines illustrant cet exposé.

Les pôles massifs présentent cependant, en démarrage asynchrone, l'inconvénient suivant : les courants qui s'y développent obéissent aux lois de l'effet pelliculaire ; ils sont donc concentrés dans une couche de 1 à 2 cm au voisinage de la surface, d'où résultent des échauffements différentiels importants conduisant à des contraintes mécaniques. Il y a lieu de vérifier que ces contraintes n'atteignent pas des valeurs dangereuses et c'est la raison pour laquelle on a été conduit à mettre au point une méthode de calcul comportant les étapes suivantes :

- calcul du champ électromagnétique dans la machine, notamment dans l'entrefer et dans le fer massif, en tenant compte de la géométrie particulière de ces domaines, de la saturation, et des conditions de raccordement au milieu extérieur
- calcul du couple électromagnétique et du processus de montée en vitesse
- calcul de la puissance dissipée localement dans le fer massif, puis des températures locales en fonction du temps
- calcul des contraintes mécaniques dues aux échauffements différentiels.

2. CALCUL ELECTRIQUE ET ELECTROMAGNETIQUE

2.1. Description

La machine synchrone est raccordée au réseau électrique par l'intermédiaire d'un transformateur. En schéma monophasé équivalent ce raccordement se représente de façon très simple conformément à la fig. 1 :

- le transformateur est représenté par une réactance X_T
- le réseau est représenté par une source de tension de valeur efficace V de fréquence et d'amplitude fixes, en série avec une réactance X_R que l'on détermine à partir de la connaissance de la puissance de court-circuit au point de raccordement
- la machine synchrone est raccordée en aval de ces deux réactances, au droit de la tension V_1 . Le calcul électromagnétique est dissocié en deux : les phénomènes intéressant uniquement le stator, qui est nourri d'un enroulement triphasé à champ tournant dont les propriétés sont bien connues, sont pris en compte simplement

par la réactance de fuites X en série avec la résistance R_s , lesquelles viennent donc fig. 1 en série avec les réactances précédentes. Les phénomènes intéressant l'entrefer et le rotor sont traités par résolution des équations du champ électromagnétique (équations de Maxwell). La frontière entre les deux modes de traitement, représentée fig. 1, est matérialisée par le contour 1 fig. 2, figure où apparaissent également les principales particularités du rotor : configuration à pôles saillants multipolaire (p paires de pôles d'où périodicité $2\pi/p$ des grandeurs électromagnétiques), géométrie complexe de l'entrefer, présence de l'enroulement inducteur de résistance R_f , qui, lors du démarrage asynchrone, est fermé sur une résistance extérieure R_c .

2.2. Principe du calcul

La montée en vitesse s'étudie pas à pas (le pas étant de l'ordre de 1 sec.), et la vitesse varie suffisamment lentement pour qu'on puisse supposer à chaque pas le régime asynchrone établi. Dans ces conditions les grandeurs électromagnétiques au rotor varient périodiquement au cours du temps avec la pulsation ω , g étant le glissement et ω la pulsation du courant venant du réseau, g étant lié à la vitesse angulaire du rotor Ω_r par la relation :

$$\Omega_r = \frac{\omega}{p} (1 - g) \quad (1)$$

On suppose 1. que les variations temporelles sont sinusoïdales
2. que malgré la saturation du fer rotorique on peut appliquer à l'ensemble de la machine synchrone et du réseau la méthode dite "de Park" ou "des deux axes", conduisant à considérer le régime des grandeurs électromagnétiques comme la superposition de deux régimes, l'un dit "d'axe direct" et l'autre dit "d'axe en quadrature" caractérisés l'un et l'autre par des conditions de symétrie remarquables par rapport aux axes d et q de la fig. 2. Nous reviendrons plus loin sur ces deux hypothèses.

2.3. Calcul électrique

Par la transformation de Park, en régime asynchrone établi, la tension V et le courant I de la fig. 1 sont représentés chacun par deux composantes (V_d et V_q , I_d et I_q) variant sinusoïdalement à la même pulsation ω que les grandeurs rotoriques. En appliquant la méthode de Park, on associe à ces grandeurs les deux composantes ϕ_d et ϕ_q du flux traversant la frontière 1 du stator (fig. 2), chacune de ces composantes étant associée à la décomposition de la distribution sinusoïdale d'induction selon les deux axes d et q (en quadrature vis-à-vis de la périodicité $2\pi/p$). ϕ_d et ϕ_q varient aussi à la pulsation ω et les équations électriques reliant ces grandeurs peuvent être écrites en utilisant la méthode classique des nombres complexes, associés à la pulsation ω , ce qui donne :

$$\begin{cases} \underline{V}_d = -j\omega (L \underline{I}_d + \underline{\phi}_d) - (1-g) \omega (L \underline{I}_q + \underline{\phi}_q) - R_s \underline{I}_d \\ \underline{V}_q = -j\omega (L \underline{I}_q + \underline{\phi}_q) + (1-g) \omega (L \underline{I}_d + \underline{\phi}_d) - R_s \underline{I}_q \end{cases} \quad (2)$$

$\underline{V}_d$ et $\underline{V}_q$ s'expriment simplement en fonction de la tension du réseau :

$$\underline{V}_d = V \sqrt{2} \quad \underline{V}_q = jV \sqrt{2} \quad (3)$$

L est l'inductance associée à la somme des 3 réactances de la fig. 1 :

$$L = L_R + L_T + L_S = \frac{X_R + X_T + X_S}{\omega} \quad (4)$$

et d'autre part le calcul électromagnétique fournira les relations manquantes entre $\underline{\phi}_d$ et $\underline{I}_d$ d'une part, $\underline{\phi}_q$ et $\underline{I}_q$ d'autre part.

2.4. Calcul électromagnétique

2.4.1. Principe. On utilise classiquement le potentiel vecteur ; en effet, la direction générale des courants stator et rotor est perpendiculaire au plan de la fig. 2. Le potentiel vecteur n'a donc en première approximation qu'une seule composante selon cette direction (ce résultat ne serait rigoureux que si la machine était de longueur infinie. On tient compte de façon approchée de l'influence des extrémités en multipliant la résistivité du fer dans le rapport $(1 + \frac{0,5b}{l})$, b étant la largeur du pôle et l sa longueur). Les phénomènes variant sinusoidalement au cours du temps à la pulsation ω , le potentiel vecteur sera lui aussi représenté par un nombre complexe et il obéit aux équations que nous donnons pour le moment sans explication :

$$\Delta \underline{A} = 0 \quad \text{dans l'air} \quad (5)$$

$$\Delta \underline{A} = \frac{j\omega \mu \mu_0 \underline{A}}{\rho} \quad \text{dans le fer} \quad (6)$$

$$\Delta \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}_f \quad \text{dans l'inducteur} \quad (7)$$

La quantité $\underline{A}$ sera par la suite affectée de l'indice d ou q pour obtenir les deux composantes de la solution, mais au niveau du principe cette distinction est inutile.

Nous ne pouvons entrer dans le détail de la méthode que l'on trouvera exposée en détail en [1] et [2]. Nous en exposons seulement les grandes lignes.

2.4.2. Solution dans le fer. Dans l'équation (6), ρ désigne la résistivité du fer et μ une perméabilité relative complexe destinée à tenir compte de la saturation magnétique du fer ; selon la méthode proposée en [1] ; μ ne dépend que de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface du fer. Elle doit donc

être calculée localement sur cette surface et de plus le calcul du régime est itératif puisque la caractéristique magnétique du fer est non linéaire.

Pour le calcul électromagnétique l'équation (6) a été transformée en simple condition de surface à la limite entre le fer et l'entrefer (frontières 3 à 7 fig. 2), en remarquant que, compte tenu de la faible valeur de la profondeur de pénétration des phénomènes électromagnétiques et de la faible courbure de la frontière précitée dans les régions où le champ est le plus fort (frontière 3 principalement), le terme prépondérant dans $\Delta \underline{A}$ est $\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial n^2}$, n étant la normale extérieure à la frontière. L'équation (6) dans le fer (indice f) au voisinage de la frontière s'écrit donc simplement

$$\frac{\partial^2 \underline{A}_f}{\partial n^2} = \beta^2 \underline{A}_f$$

$$\text{en posant } \beta^2 = \frac{j\omega \mu_0 \mu}{\rho}$$

d'où il résulte, compte tenu du fait que $\underline{A}_f \Rightarrow 0$ si $n \Rightarrow -\infty$

$$\frac{\partial \underline{A}_f}{\partial n} = \beta \underline{A}_f$$

en choisissant pour β la racine de partie réelle positive.

A la traversée de la frontière le potentiel vecteur est conservé, ainsi que la composante tangentielle du champ. Les conditions de passage sont donc, en appelant $\underline{A}_e$ le potentiel vecteur dans l'entrefer mais au droit de la frontière :

$$\underline{A}_e = \underline{A}_f \quad ; \quad \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial \underline{A}_f}{\partial n} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_e}{\partial n}$$

d'où en définitive la condition de surface à la frontière entrefer-fer massif, mais du côté de l'entrefer :

$$\frac{\partial \underline{A}_e}{\partial n} = \frac{\beta}{\mu} \underline{A}_e \quad (8)$$

Grâce à ce traitement il ne reste plus qu'à résoudre les équations (5) et (7) dans l'air, associées à certaines conditions aux limites dont la condition (8).

Il faut bien noter que cette approximation n'est valable que pour des glissements élevés, c'est-à-dire tels que la profondeur de pénétration soit faible d'une part devant le pas polaire et d'autre part devant le rayon de courbure de la frontière dans les régions à fort champ. Il se trouve que les phénomènes les plus contraignants pour la machines (températures, contraintes) interviennent pendant qu'on est encore dans le domaine de validité de cette

approximation ; par contre le modèle est un peu moins représentatif aux glissements très faibles, c'est-à-dire lorsqu'on s'approche du synchronisme.

2.4.3. Solution dans l'entrefer. L'entrefer est discrétisé selon un maillage représenté à titre d'exemple fig. 3 (il varie d'une machine à l'autre). Examinons par exemple la solution d'axe d (symétrie par rapport à l'axe d, notée $\underline{A}_d$).

L'équation est (5) dans le domaine extérieur à l'inducteur, (7) dans le domaine occupé par l'inducteur ; dans cette équation $\underline{J}_F$ est la densité moyenne de courant, que l'on peut considérer macroscopiquement comme constante dans le domaine compte tenu du fait que l'inducteur comporte un grand nombre de spires. $\underline{J}_F$ est lié à $\underline{A}_d$

dans ce domaine par la relation (issue de $\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, avec $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et $\vec{J} = \sigma \vec{E}$)

$$\underline{J}_F = \frac{j g \omega \sigma_1}{S} \int_S \underline{A}_d \, dS \quad (9)$$

S étant la surface du rectangle tel que représenté fig. 2, et σ_1 une conductivité équivalente tenant compte du coefficient de rem-plissage, de l'influence des têtes de bobines et de la résistance extérieure R_e .

Le problème est caractérisé par les conditions aux frontières 1 à 8 de la fig. 2.

A la frontière 1 l'influence du stator est caractérisée par la densité linéique de courant $\underline{J}_d$ due au bobinage triphasé. Elle est à distribution sinusoïdale et est égale à la composante tangentielle du champ au droit de la frontière d'où la condition à la frontière 1

$$\frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n} = \mu_0 \underline{J}_d \sin p \theta$$

Aux frontières 2 et 8 des considérations de symétrie entraînent :

$$\text{Frontière 2} \quad \underline{A}_d = 0$$

$$\text{Frontière 8} \quad \frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n} = 0$$

Aux frontières 3 à 7 s'applique la condition (8), avec l'indice d pour $\underline{A}$

La méthode de résolution est alors la suivante ; on a :

$$\underline{A} \underline{A}_d = 0 \quad \text{dans } S$$

$$\underline{A} \underline{A}_d = 0 \quad \text{ailleurs dans l'entrefer}$$

avec continuité de $\underline{A}_d$ et de sa dérivée normale à l'interface.

D'après (7) et (9) k est une constante dépendant des valeurs de $\underline{A}_d$ dans S, qu'on pourra donc évaluer au cours du processus itératif.

La discrétisation du domaine conduit à considérer n_F points dans la zone S (frontière comprise) et N points sur la frontière du domaine complet. On note $\underline{A}_F$ le vecteur formé avec l'ensemble des n_F valeurs de $\underline{A}_d$ dans la zone S et on note A et $\frac{\partial A}{\partial n}$ les vecteurs formés respectivement avec les N valeurs de $\underline{A}_d$ et les N valeurs de $\frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n}$ pour les points de la frontière du domaine complet. Il est possible de trouver des matrices M et P et des vecteurs R et T tels que :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = MA + RT$$

$$\underline{A}_F = FA + kT$$

En effet, la résolution du problème de Dirichlet par la méthode des éléments finis (nous avons utilisé des éléments linéaires)

$$\begin{cases} \underline{A} \underline{A} = 0 & \text{sur l'ensemble du domaine} \\ \underline{A}_i = 1 \\ \underline{A}_j = 0 & \text{pour } j = 1 \text{ à } N \text{ avec } j \neq i \end{cases}$$

fournit la ième colonne de la matrice M et la ième colonne de la matrice P.

On résout ainsi N problèmes en imposant successivement la valeur 1 au potentiel vecteur en l'un des points de la frontière, la valeur étant 0 pour tous les autres points. En fait, on peut obtenir directement M et P à l'aide d'un algorithme frontal appliqué aux matrices de rigidité élémentaires.

Pour obtenir les vecteurs R et T, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \underline{A} \underline{A} = 0 & \text{dans la zone extérieure à l'inducteur} \\ \underline{A} \underline{A} = 1 & \text{dans la zone occupée par l'inducteur (zone S)} \\ \underline{A}_i = 0 & \text{pour } i = 1 \text{ à } N \end{cases}$$

La méthode utilisée est celle des éléments finis.

Ainsi la solution du problème électromagnétique dans le fer et dans l'entrefer se ramène à un calcul qui ne fait intervenir que la frontière de l'inducteur, ainsi que des points situés dans la surface S (à cause de l'équation (9)).

Solution d'axe q

La solution d'axe q (symétrie par rapport à l'axe q, potentiel vecteur noté $\underline{A}_q$) est obtenue par le même processus, avec les différences suivantes :

- les symétries du courant $\underline{J}_f$ font que sa contribution au potentiel vecteur est nulle, si bien que l'équation (5) $\Delta \underline{A}_q = 0$ s'applique à tout le domaine.

- A la frontière 1 l'influence du stator est caractérisée par la densité linéique $\underline{J}_q$ liée à la composante tangentielle du champ

$$\frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n} \text{ par}$$

$$\frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n} = \mu_0 \underline{J}_q \cos p \theta$$

- Aux frontières 2 et 8 les considérations de symétrie entraînent :

$$\text{Frontière 2} \quad \frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n} = 0$$

$$\text{Frontière 8} \quad \underline{A}_q = 0$$

Aux frontières 3 à 7 s'applique toujours la condition (3), avec l'indice q pour $\underline{A}$.

2.5. Raccordement du calcul électromagnétique et du calcul électrique

Le calcul électromagnétique permet de déterminer $\underline{A}_d$ et $\underline{A}_q$ en tout point de la frontière, connaissant $\underline{J}_d$ et $\underline{J}_q$.

Les densités linéiques de courant $\underline{J}_d$ et $\underline{J}_q$ sont directement proportionnelles aux composantes correspondantes du courant stator $\underline{I}_d$ et $\underline{I}_q$, la relation étant :

$$\frac{\underline{I}_d}{\underline{J}_d} = \frac{\underline{I}_q}{\underline{J}_q} = \frac{\pi R}{6 p n' s}$$

avec : R = rayon à l'alésage stator (frontière 1 fig. 2)

$n' s$ = nombre de spires stator en série par pôle et phase.

D'autre part la relation $\vec{v} = \text{rot } \vec{A}$ entraîne, par application du théorème de Stokes et en prenant Od comme origine des angles fig. 2, que :

$\underline{A}_d$, flux d'axe direct, est proportionnel à la valeur de $\underline{J}_d$ au droit du rayon R et des angles $\pm \frac{\pi}{2p}$ (ces valeurs sont celles et

opposées).

Les propriétés du bobinage stator des machines synchrones entraînent que les flux intervenant dans les équations (2) correspondent à l'intégrale de surface du 1er harmonique de la décomposition en série de Fourier de la distribution d'induction, en fonction de θ , au droit du rayon R. On doit donc établir la proportionnalité de $\underline{A}_d$ et $\underline{A}_q$ non pas aux valeurs de $\underline{J}_d$ et $\underline{J}_q$ aux angles précités, mais à l'amplitude du premier harmonique de la décomposition des distributions de $\underline{J}_d$ et $\underline{J}_q$, au droit du rayon R, en fonction de θ , soient $\underline{A}_{d1}$ et $\underline{A}_{q1}$ d'où les relations :

$$\frac{\underline{A}_{d1}}{\underline{A}_{q1}} = \frac{\underline{\Phi}_d}{\underline{\Phi}_q} = 4 p n' s l_s$$

avec l_s = longueur du circuit magnétique du stator.

2.6. Processus itératif

Le calcul est nécessairement itératif du fait que la perméabilité complexe μ en chaque point de la frontière du fer massif dépend du champ magnétique tangentiel appliqué. On profite alors de cette circonstance pour tenir compte itérativement de la présence de l'inducteur, l'intégrale (9) étant évaluée à partir des valeurs de $\underline{A}_d$ obtenues au pas précédent.

La présence de la saturation magnétique introduit en toute rigueur une dissymétrie dans le comportement des parties droite et gauche du pôle.

En effet, ce comportement est la superposition des solutions d'axe direct et d'axe quadrature, qui conduit sur tous les demi-pôles

de droite au champ tangentiel $\frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n} + \frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n} \right|$ et sur tous les demi-

pôles de gauche au champ tangentiel $\frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n} - \frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n} \right|$

Fort heureusement la nature des phénomènes est telle que la différence des arguments de $\frac{\partial \underline{A}_d}{\partial n}$ et $\frac{\partial \underline{A}_q}{\partial n}$ est de l'ordre de 90° , si bien

que les deux modules ci-dessus ne sont pas notablement différents et que, pour l'évaluation du couple électromagnétique et des phénomènes électriques, on peut conserver la symétrie et évaluer μ à partir de la moyenne de ces deux modules. Notons que ce procédé de prise en compte de la saturation permet d'appliquer valablement le procédé de superposition aux solutions d'axes d et q malgré le caractère non linéaire du problème.

3. CALCUL DU COUPLE ELECTROMAGNETIQUE ET DE LA LOI DE MONTÉE EN VITESSE

Pour chaque valeur du glissement, le couple électromagnétique (moteur) a pour valeur :

$$C_e = \frac{3p}{4} R_e \left\{ \underline{I}_d \underline{\phi}_q^* - \underline{I}_q \underline{\phi}_d^* \right\}$$

(le symbole * signifiant "imaginaire conjugué").

g étant lié à la vitesse de rotation Ω_r par (1) l'équation du mouvement s'écrit :

$$C_e(\Omega_r) = J_i \frac{d\Omega_r}{dt} + C_r(\Omega_r)$$

J_i = moment d'inertie des masses tournantes

C_r = couple résistant.

C_e et C_r étant peu variables avec Ω_r du moins pendant la partie intéressante du démarrage (voir fig. 5 et 14), l'intégration pas à pas peut se faire sur des intervalles de temps relativement longs (de l'ordre de 1 sec.).

4. CALCUL DES PERTES DISSIPÉES LOCALEMENT DANS LE FER

Lorsqu'on aborde le problème des contraintes locales, il convient de tenir compte des différences de comportement des parties droite et gauche du pôle. On utilise donc en tout point de la surface la valeur exacte du champ tangentiel H_t (en valeur efficace) obtenu comme indiqué à la fin du par. 2.

Conformément à la théorie développée en ³, à chaque élément de surface, soumise au champ H_t , peut être attribuée une puissance dissipée

$$p_s = \frac{\rho H_t^2}{\delta} \quad (Wm^{-2})$$

avec $\delta = \frac{\sqrt{2}}{|\underline{\beta}|}$, et le $\underline{\mu}$ intervenant dans $\underline{\beta}$

dépendant lui-même de H_t .

Par ailleurs on a pu montrer ³ qu'en régime saturé les pertes par unité de volume pouvaient être considérées comme une fonction linéairement décroissante de la seule profondeur, s'annulant à la profondeur $\delta\sqrt{2}$, d'où l'évaluation de la puissance dissipée, par unité de volume, en tout point du pôle : quelques aménagements de détail ont été apportés à ce modèle pour tenir compte des régions situées au voisinage d'une forte courbure ou d'un point anguleux de la surface.

5. CALCUL DES TEMPERATURES LOCALES ET DE LEUR VARIATION AU COURS DU DÉMARRAGE

La température $\theta(x, t)$ en tout point du pôle est reliée aux pertes Joule par l'équation

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) - \lambda \Delta \theta(x, t) = P(x, t) \quad (10)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : \text{masse spécifique du pôle} \\ c : \text{chaleur spécifique} \\ \lambda : \text{coefficient de diffusion thermique} \\ P : \text{pertes Joule} \end{array} \right.$$

On a supposé pour simplifier que le pôle n'avait aucun échange thermique avec l'air de l'entrefer et le reste de la machine : les conditions aux limites associées à (10) sont alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur la frontière du pôle.}$$

Il faut évidemment connaître la température initiale θ_0 du pôle.

Le pôle ayant une forme relativement simple la discrétisation spatiale de (10) a été faite suivant la technique classique des différences finies. Le calcul est fait en géométrie bidimensionnelle.

En effet, la densité de courant dans le pôle massif varie assez peu en fonction de la coordonnée axiale, surtout au regard de ses variations dans les deux autres directions, pour qu'on puisse négliger cette variation : c'est pourquoi au par. 4 les pertes ont été supposées elles aussi indépendantes de cette coordonnée, et c'est pourquoi ici le calcul thermique est effectué seulement dans le plan de la fig. 3 (ou 2). On a cependant pris comme domaine un pôle entier (angle $\frac{\pi}{p}$), puisque la distribution des pertes n'est pas symétrique.

La discrétisation en temps est effectuée suivant le schéma de Crank-Nicholson :

$$\rho c \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + \Lambda \left[\alpha \theta^{n+1} + (1 - \alpha) \theta^n \right] = \theta^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad (11)$$

où Λ est la matrice approchant l'opérateur $-\lambda \Delta$ de (10).

α est un paramètre compris entre 1 et 1/2.

L'indice n signifie que les grandeurs sont prises à l'instant $t_n = n\Delta t$.

La méthode itérative de surrelaxation est utilisée pour résoudre, à chaque pas de temps, le système linéaire en 0^{n+1} . Une dizaine d'itérations sont nécessaires en moyenne pour chaque résolution.

Cette méthode numérique est inconditionnellement stable, et le pas de temps choisi est $\Delta t = 1$ seconde.

6. CALCUL DES CONTRAINTES MÉCANIQUES D'ORIGINE THERMIQUE

Sous l'effet de l'échauffement $\theta(x,t) - \theta_0(x)$, le matériau se dilate, mais comme l'échauffement n'est pas homogène, cette dilatation ne peut s'effectuer librement, d'où l'apparition de contraintes mécaniques à l'intérieur du pôle.

Si $\vec{u}$ désigne le champ des déplacements, les contraintes mécaniques σ_{ik} sont reliées aux échauffements par les équations :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik} = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, & i = 1 \text{ à } 3 \\ \sigma_{ii} = \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \sigma_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), & i \neq k \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} E & \text{module d'élasticité} \\ \nu & \text{coefficient de Poisson} \\ \alpha & \text{coefficient linéique de dilatation.} \end{cases}$$

Les conditions aux limites prises pour les équations sont :

- déplacement nul $\vec{u} = 0$, sur le pied du pôle.

- $\sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \cos(\vec{n}, \vec{e}_k) = 0$, $i = 1 \text{ à } 3$ sur la frontière du

pôle en contact avec l'entrefer (pas de forces de contact).

$\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface du pôle et $\vec{e}_i$ est le vecteur unitaire de l'axe des x_i .

Dans ces équations ont été négligées : les forces de pesanteur et les forces centrifuges.

Comme le matériau se dilate dans les trois directions, le calcul mécanique a été fait en géométrie tridimensionnelle, contrairement aux calculs électromagnétiques et thermiques.

La méthode des éléments finis a été utilisée pour faire ce calcul (éléments linéaires) ⁸, avec un algorithme de résolution de type frontal.

Si on s'intéresse seulement à la contrainte maximale - la plus intéressante sur le plan pratique - on peut la déterminer avec une très bonne approximation par une formule très simple assimilant le pôle à un demi-espace en fer, limité par une surface plane, infini dans la direction z perpendiculaire à cette surface, et soumis à un instant donné à une loi de température ne dépendant que de z .

La contrainte maximale, au centre de la surface du pôle, est alors donnée par :

$$\sigma = \frac{\alpha E (\theta_M - \theta_m)}{1-\nu} \quad (12)$$

avec θ_M = température maximale en surface

θ_m = moyenne de la température, prise sur la hauteur du pôle jusqu'au point d'arréage

Le calcul tridimensionnel n'est dès lors pratiquement plus utilisé compte tenu de son temps de calcul prohibitif.

7. COMPARAISON DES RESULTATS DE CALCULS ET DE MESURES

7.1. Préliminaires théoriques

Les comparaisons qui vont suivre concernent toutes des grandeurs obtenues par les calculs précédemment décrits, à l'exception des grandeurs électriques aux bornes du stator. Du fait de l'anisotropie de la machine les valeurs efficaces des tensions et des courants à 50 Hz, ainsi que la puissance active et réactive, ne sont pas constantes mais fluctuent, à la pulsation 2ω , autour d'une valeur moyenne. On a utilisé des formules simples donnant seulement la valeur moyenne de ces grandeurs.

Au droit de V_1 figure 1 les composantes I_d et I_q sont données par le calcul général, par contre les composantes V_{d1} et V_{q1} de V_1 sont données par :

$$\underline{V}_{d1} = \underline{V}_d + (1 - g) (X_R + X_T) \underline{I}_q + jg (X_R + X_T) \underline{I}_d$$

$$\underline{V}_{q1} = \underline{V}_q - (1 - g) (X_R + X_T) \underline{I}_d + jg (X_R + X_T) \underline{I}_q$$

Les valeurs moyennes sont alors données par les expressions :

Courant I (valeur efficace)

$$I = \left| \frac{\underline{I}_d - j \underline{I}_q}{2\sqrt{2}} \right|$$

Tension V_1 aux bornes du stator (valeur efficace, entre phase et neutre)

$$V_1 = \left| \frac{\underline{V}_{d1} - j \underline{V}_{q1}}{2\sqrt{2}} \right|$$

Puissance active absorbée aux bornes du stator

$$P = - \frac{3}{4} R_c \left\{ \underline{V}_{d1} \underline{I}_{d1}^* + \underline{V}_{q1} \underline{I}_{q1}^* \right\}$$

Puissance réactive absorbée aux bornes du stator

$$Q = \sqrt{(3V_1 I)^2 - P^2}$$

7.2. Machine n° 1

Ses caractéristiques nominales sont les suivantes :

Puissance apparente nominale 72 MVA

Vitesse nominale 150 t/mn ($p = 20$)

Tension nominale 10,3 kV

La loi de montée en vitesse est représentée fig. 4. La concordance entre le calcul et la mesure est bonne, et laisse présumer que la caractéristique calculée du couple moteur en fonction de la vitesse, représentée fig. 5, est correcte. Sur cette figure est également représentée la caractéristique du couple résistant, fournie par le constructeur, nécessaire pour pouvoir résoudre l'équation du mouvement.

Sur les fig. 6 et 7 sont représentées les lois de variation de la tension, du courant, de la puissance active et réactive aux bornes du stator.

Sur la fig. 8 est représentée la variation de l'amplitude du courant alternatif induit dans l'enroulement inducteur. La bonne concordance des deux courbes, pendant la plus grande partie du démarrage, est un bon garant de la finesse de la méthode car elle montre que la distribution du flux est assez correctement prise en compte même dans l'espace interpolaire, là où pourtant les hypothèses ayant présidé à la prise en compte du fer massif pourraient apparaître les plus contestables, du fait des nombreux points anguleux que présente le contour du fer dans cette région. Les écarts que présentent les deux courbes en fin de démarrage sont surtout dus à l'effet d'anisotropie : au couple moyen, le seul pris en compte dans notre calcul, se superpose comme il a été dit un couple variant à la pulsation $2g\omega$, qui entraîne surtout au voisinage du synchronisme d'importantes fluctuations de vitesse d'où un comportement perturbé du courant inducteur. C'est là un aspect de la méthode qui pourrait être amélioré, mais dont nous n'avons pas tenu compte du fait que les contraintes les plus sévères pour la machine ont lieu bien avant l'apparition de ces perturbations.

Les trois figures suivantes (9, 10, 11) concernent l'évolution des échauffements en des points où étaient placées des sondes thermiques. L'emplacement de ces points est repéré sur la fig. 3, et longitudinalement ils sont tous situés environ au milieu de la longueur du pôle. Le point B (et son symétrique B') sont situés aux extrémités de la zone où la surface du pôle est concentrique au stator. Le point A (et son symétrique A') sont situés aux extrémités des cornes polaires. Les points C, D, E sont situés au droit de l'axe d, C en surface, D à 19 mm de profondeur, E à 32 mm de profondeur. On note non seulement la bonne concordance entre les mesures et les calculs, mais également le fait que les différences de comportement des points B, C, D' sont correctement évaluées, les points B et C subissant un échauffement supérieur à D', cette dissymétrie ayant été prise en compte comme il a été indiqué à propos du calcul des puissances dissipées localement.

Enfin sur la fig. 12 est reportée la contrainte au point C (fig. 3), c'est-à-dire au centre de la surface du pôle. En ce point (comme en de nombreux autres) avaient été placées des jauges de contraintes. C'est la jauge longitudinale en C qui de toutes a donné la contrainte maximale (en compression), ce que laisse prévoir la théorie : la contrainte calculée a été obtenue à l'aide de la formule simplifiée (12). La valeur maximale atteinte (27 ± 38 lb) est très inférieure à la limite admissible.

L'ensemble des comparaisons sur la machine 1, peut être considéré comme tout à fait satisfaisant.

7.3. Machine n° 2

Ses caractéristiques nominales sont les suivantes :

Puissance apparente nominale 64 MVA

Vitesse nominale 166,7 t/mn ($p = 18$)

Tension nominale 10,3 kV

Sur les fig. 13 à 17 sont reportées les mêmes grandeurs que, pour la machine 1, sur les fig. 4 à 8 ; les mêmes commentaires peuvent lui être appliqués.

Sur la fig. 18 est reporté l'échauffement calculé au point le plus chaud. Le maximum est atteint au bout de 8 sec., et il vaut 110°C . Lors des essais le pôle était équipé seulement d'indicateurs colorés qui n'ont donc permis d'apprécier que la température maximale atteinte et non son évolution dans le temps. On avait disposé plusieurs séries d'indicateurs à la surface du pôle, au voisinage du centre dans le sens longitudinal mais couvrant toute la largeur du pôle ; les températures maximales observées par ce moyen étaient comprises entre 121° et 130°C , ce qui recoupe bien le calcul, la température initiale (état froid) ayant été estimée à 15°C .

Enfin à partir de la carte des températures on peut estimer la contrainte maximale, par la formule simplifiée (12). On trouve 35 hb (en compression, dans le sens longitudinal, au centre de la surface du pôle), valeur très inférieure à la limite admissible.

8. CONCLUSION

La méthode proposée de calcul du démarrage asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs conduit à une bonne concordance des grandeurs calculées et mesurées, du moins en ce qui concerne les deux machines sur lesquelles la comparaison a pu être faite. Cette concordance concerne les grandeurs électromagnétiques, électriques, thermiques et mécaniques et constitue donc une justification des hypothèses simplificatrices adoptées à chacune des étapes du calcul.

L'intérêt de cette méthode, au-delà de la simple appréhension par le calcul de phénomènes physiques conduisant à des calculs relativement complexes, est bien évidemment de permettre la détermination des limites d'emploi du démarrage asynchrone utilisant les pôles massifs par l'appréciation des contraintes maximales subies par le fer, et dans les cas limites de guider d'éventuelles modifications constructives ramenant ces contraintes dans les limites tolérables.

9. ADRESSE

Vous souhaitons remercier tout particulièrement :

- M. AUBAUME et Mme THUAT pour l'élaboration des programmes de calcul électromagnétique.

- M. BENJAMIN qui a mis au point le calcul tridimensionnel des contraintes mécaniques

- Nos collègues de la Division Technique Générale (Service de la Production Hydraulique) d'E.D.F. qui ont réalisé toute la partie expérimentale associée à cette étude.

10. BIBLIOGRAPHIE

1. Ph. BARRET. Cours d'Electrotechnique à l'ESE - Tome IV - Régimes transitoires des machines tournantes - 1974.
2. B. ADAMS ET G. WIDGER. Starting performances of synchronous motors with solid salient poles - Proc IEE n° 10 - 1968 p. 1471 - 1484.
3. Ph. BARRET. Contribution à l'étude des régimes variables des turboalternateurs de grande puissance. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F., série 3 n° 2 - 1977 - p. 1 - 292.
4. Ph. BARRET. Etude du démarrage asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs, note interne E.D.F. - DT 10-50 du 13.3.1972 (mise à jour 4.10.1973).
5. J. Y. BIDAN. Etude numérique du démarrage asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs, note interne E.D.F. - DT 1467-02 du 15.3.1974.
- et D. HUTZLER. Etude numérique du démarrage asynchrone des machines synchrones à pôles saillants massifs avec prise en compte de l'enroulement inducteur, note interne E.D.F. - DT 1980-02 du 17.11.1975 (mise à jour 15.2.1978).
6. M. AUBAUME, C. BENJAMIN. Application de la méthode des éléments finis à la résolution numérique des problèmes d'élasticité. Revue française de mécanique n° 35 - 1970 - p. 5 à 18).
7. D. THUAT, J. PIANCHARD, D. HUTZLER. Calcul des températures d'un pôle massif d'alternateur, note interne E.D.F. - DT 2022/02 du 22.1.76 (mise à jour 15.2.78).
8. ZIENKIEWICZ. The finite element method in structural and continuum mechanics, Mac Graw Hill - 1967.
9. R.S. VARGA. Matrix iterative analysis. Prentice Hall 1962.

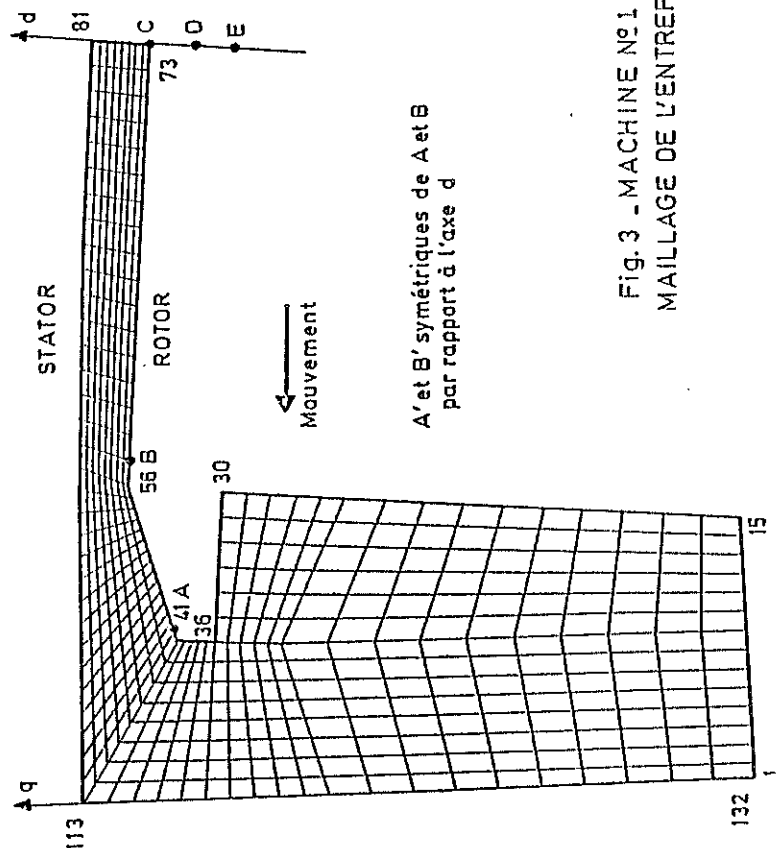


Fig. 3 - MACHINE N°1
MAILLAGE DE L'ENTREFER

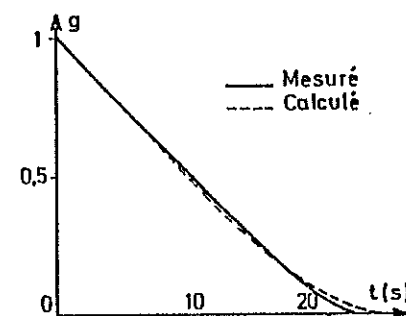


Fig. 4 - MACHINE N°1 - LOI DE
MONTEE EN VITESSE

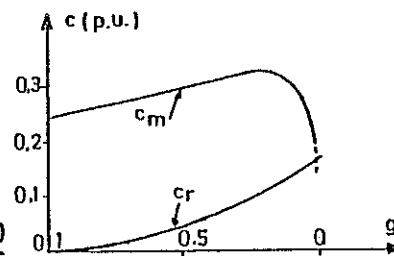


Fig. 5 - MACHINE N°1 - COUPLE
MOTEUR CALCULE ET COUPLE
RESISTANT, EN FONCTION DU
GLISSEMENT

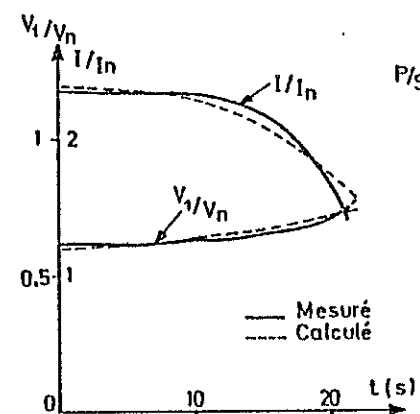


Fig. 6 - MACHINE N°1 - TENSION AUX
BORNES DE LA MACHINE ET COURANT
PENDANT LE DEMARRAGE

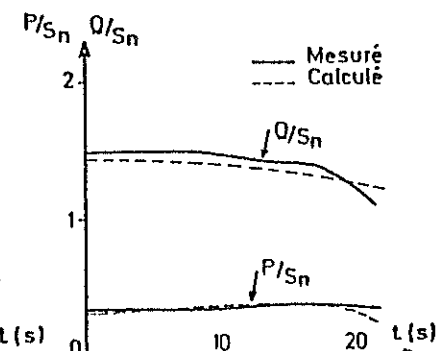


Fig. 7 - MACHINE N°1 - PUISSANCE
ACTIVE ET REACTIVE AUX BORNES
DE LA MACHINE PENDANT LE
DEMARRAGE

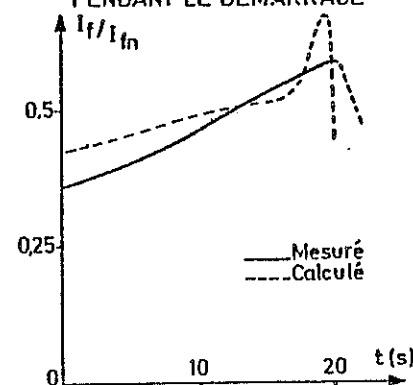


Fig. 8 - MACHINE N°1 - COURANT DANS
L'INDUCTEUR PENDANT LE DEMARRAGE

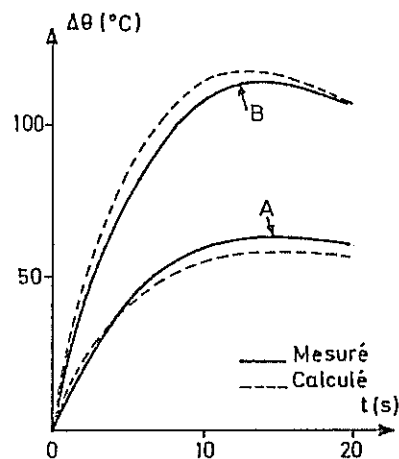


Fig. 9. MACHINE N°1. ECHAUFFEMENTS AUX POINTS A et B (cf fig 3) PENDANT LE DEMARRAGE

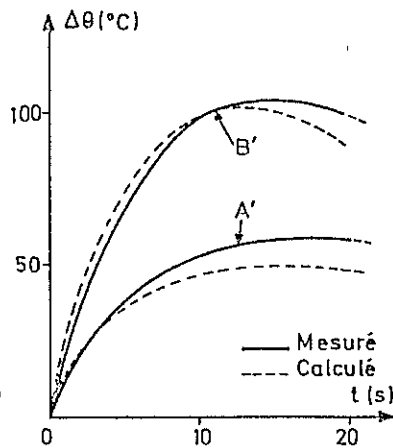


Fig. 10. MACHINE N°1. ECHAUFFEMENTS AUX POINTS A' et B' (cf fig 3) PENDANT LE DEMARRAGE

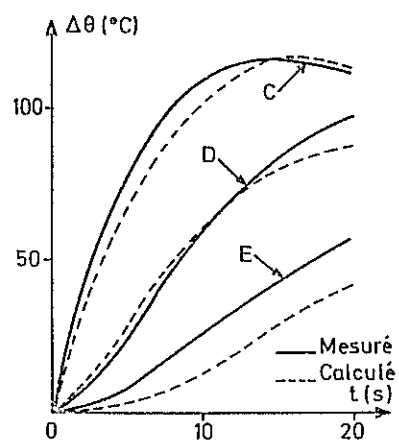


Fig. 11. MACHINE N°1. ECHAUFFEMENTS AUX POINTS C, D, E (cf fig 3) PENDANT LE DEMARRAGE

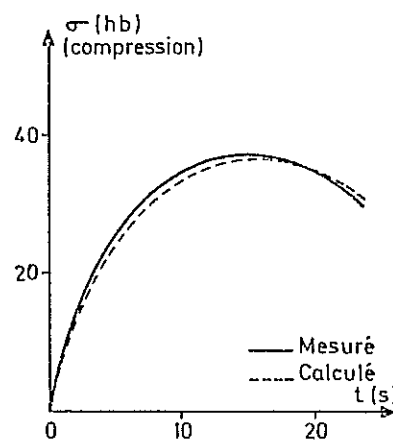


Fig. 12. MACHINE N°1. CONTRAINTE MECANIQUE MAXIMALE AU COURS DU DEMARRAGE ASYNCHRONE

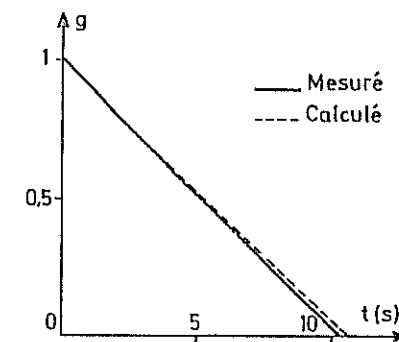


Fig. 13. MACHINE N°2. LOI DE MONTEE EN VITESSE

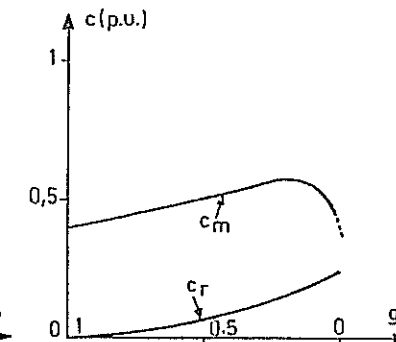


Fig. 14. MACHINE N°2. COUPLE MOTEUR CALCULE ET COUPLE RESISTANT, EN FONCTION DU GLISSEMENT

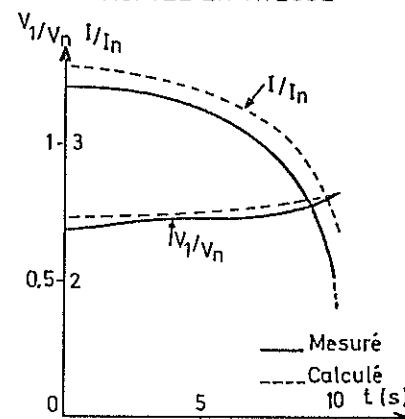


Fig. 15. MACHINE N°2. TENSION AUX BORNES DE LA MACHINE ET COURANT PENDANT LE DEMARRAGE

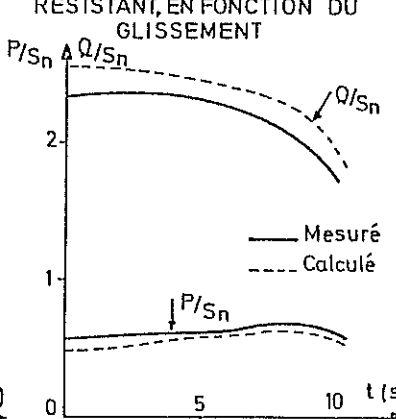


Fig. 16. MACHINE N°2. PUISSANCE ACTIVE ET REACTIVE AUX BORNES DE LA MACHINE PENDANT LE DEMARRAGE

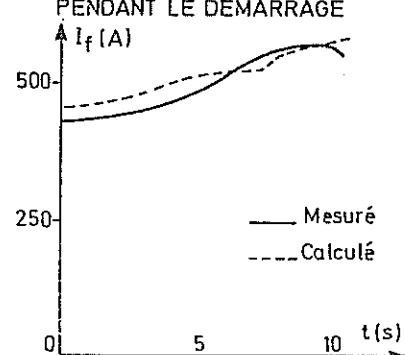


Fig. 17. MACHINE N°2. COURANT DANS L'INDUCTEUR PENDANT LE DEMARRAGE

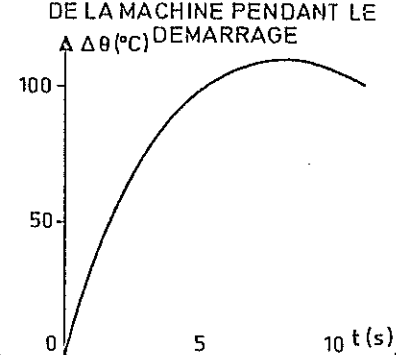


Fig. 18. MACHINE N°2. ECHAUFFEMENT CALCULE AU CENTRE DE LA SURFACE DU POLE

FLUX DISTRIBUTION IN TRANSFORMER CORES

A. Basak, C.R.G. Higgs and A.J. Moses
Wolfson Centre for Magnetics Technology, Department of Electrical
and Electronic Engineering, University College, Cardiff, UK

ABSTRACT

A new method of computing the magnetic fields in electrical steel laminations has been applied to determine the flux distribution in transformer cores. An isotropic material, a simple geometry without any joint at T sections or corners and a single value B-H curve were considered for the numerical work. The results were compared with the experimental results obtained from similar material with identical geometry. In the case of fundamental components of flux the agreement was within 12 percent, whereas there was a large discrepancy in the case of magnitudes of the third harmonics, though in both cases flux components were found to circulate in the T sections.

1. INTRODUCTION

In modern transformer cores, iron losses are quite low because of improvements in usage of material and better quality electrical steel. However, there is still room for considerable improvement, much of which can be brought about by obtaining a better understanding of localised flux and loss distributions in cores. It is still not possible to predict with any confidence the flux (including harmonics) which determines the localised losses apart from in devices with very simple geometries. Even then a 'building factor' is applied to the nominal core loss in order to estimate the losses on assembly. The building factor may be as high as 3, i.e. the measured core loss can be three times the nominal steel loss. What determines the building factor is not understood although an important aspect is undoubtedly flux distortion in the core¹. In the plane of the laminations the rotational and circulating fluxes in addition to the alternating flux make large contributions to the total power loss. The rotational flux occurs in the T joints causing localised areas of high power loss, whereas circulating fluxes occur in the limbs and yokes of the core and cause an increase in loss of up to twenty percent^{2,3}. In the vicinity of the T and corner joints flux transfer from layer to layer occurs⁴. Though this normal flux is small, it produces considerable amount of loss in the laminations⁵.

For the last few years, a wide range of experimental work had been carried out with the aim of determining the localised flux and loss distributions in transformers having different core and joint configurations built from various types of electrical steel lamination; but assembling different cores for measurement in this way is a laborious and time consuming process^{2,4,6}. Recently, attempts have been made to predict the flux distribution in transformer cores using computational techniques^{7,8,9}, but no direct comparison with measurements have been made to assess their accuracy. The purpose of this paper is to describe how a computation technique developed

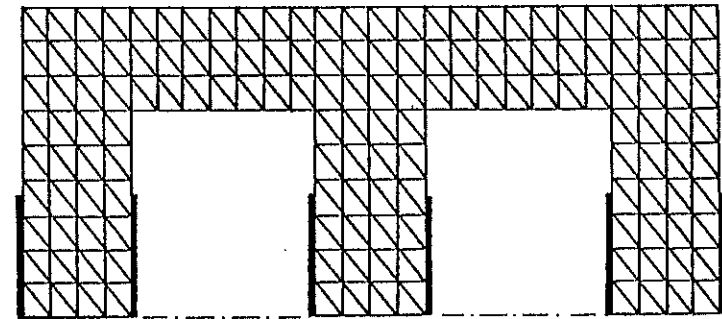


Fig. 1 — Discretised transformer geometry without any joint.

at Rutherford Laboratory, UK, has been used to analyse the flux distribution in a 3-limb, 3-phase transformer core built from isotropic material without joint. At present a programme is being developed to include the T and corner joints of a transformer core. A direct comparison has been made between the computed and experimental results.

2. COMPUTATIONAL METHOD

The fields are calculated using a technique developed by J. Simkin and C.W. Trowbridge¹⁰. This technique, known as PE2D, solves the problem using a finite element method. The information which is required to be fed into the system is the dimension of the core, the B-H curve of the material, the position and dimension of the exciting coils and the current densities in each coil at different instants of magnetizing cycle. The interval was chosen to be 10° but much smaller intervals for more accurate results of harmonics are desirable. Though the initial study has been done on a two dimensional basis, this method can be extended to three dimensional problems at a later stage.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Initially, a single-layer 3-limb transformer geometry without any joint was considered. The material chosen was isotropic. Since the geometry was symmetrical only the top half of the core and the surrounding area were discretised into 1080 elements with 592 nodes. Figure 1 shows the transformer geometry and the exciting coils around the limbs. Current densities in the windings were chosen so that a peak flux density of 1.5 T was obtained in the limbs. Current density in the right limb was leading those in the centre and the left limbs by 120° and 240° respectively. Figure 2 shows the B-H characteristic of the material which was employed to build experimental transformer core and used for the computation. The

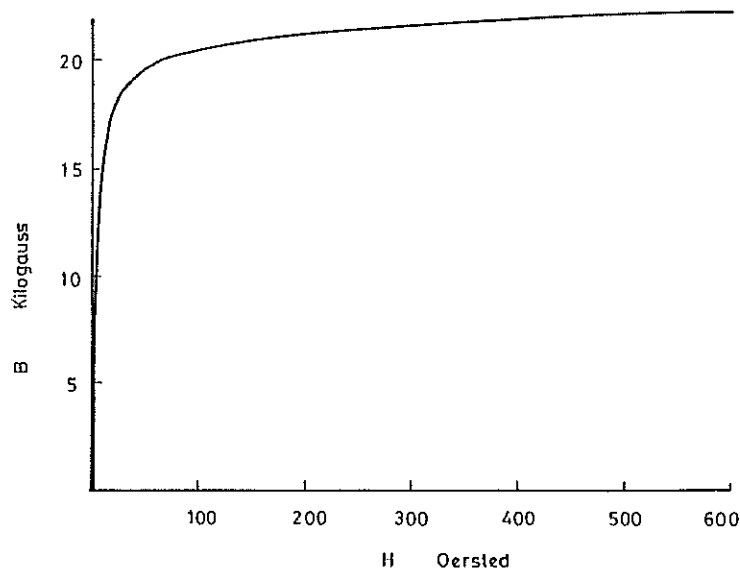


Fig. 2 - B-H curve of the material used for experiment and computation.

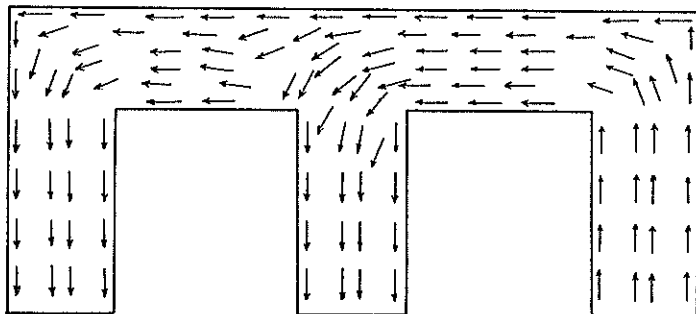


Fig. 3 - Direction of total fluxes at an instant when $\omega t = 150^\circ$.

instantaneous values of the x and y components of flux densities in all the elements of the configuration were computed over the half of a magnetizing cycle at an interval of 10° . The direction of total fluxes in the elements at two instants ($\omega t = 150^\circ$ and $\omega t = 180^\circ$) of the magnetizing cycle are shown in Figs. 3 and 4. The fourier analysis of x and y components of total flux gives the amplitudes and directions of the fundamental and the harmonic components. Figure 5 shows the fundamental flux vectors in some of the elements at T and corner joints and also at the middle of the limbs and the yokes. The third harmonic flux vectors in the same element were also plotted, see Fig. 6.

One layer of a 3-limbed transformer core with the same geometry as used for computation was punched out from a single sheet and used for experiment. It was supplied from a 50 Hz, 3-phase supply and the core flux density was set at 1.5 T. The localised flux density was measured by search coils and B and K wave analyser employing the technique described by Moses, Thomas and Thompson¹¹. The flux vectors were calculated and plotted for each test point. Winding of search coils is a tedious process and therefore, in this case, test points were limited to only one corner, T section and middle of the centre limb. Figures 7 and 8 show the fundamental and third harmonic flux density vectors experimentally obtained in those areas.

The discrepancy between the results obtained using the computation and the experimental methods varies between 5% to 12% in the case of fundamental flux densities; but in the case of third harmonics, not only larger discrepancy in magnitude was found, but also direction of the vectors were different. However, in both cases similar patterns of circulating third harmonic flux in the T section were

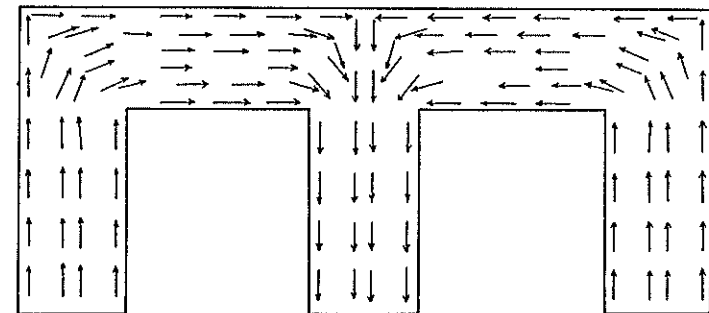


Fig. 4 - Direction of total fluxes at an instant when $\omega t = 180^\circ$.

observed. This verified the prediction by Brailsford and Mazza³. The discrepancy results partly due to assuming single value B-H curve for the computational study and also having large time intervals over a magnetizing cycle. The third harmonic component circulating in the limbs and the yokes as found previously by experiment in transformer core models built with anisotropic material and joints at T sections and corners, was found in neither the experimental nor the computational studies. This shows that circulating harmonics in the limbs originate from the joints and may be affected by anisotropy of the material.

First a typical B-H characteristics of the material was used for computation, but later the B-H curve for the test material was obtained experimentally. The improvement in the result was not significant.

A transformer geometry with joints was also considered. Figure 9 shows a model with most popular 45° - 90° T joint and 45° corner joint. The air gaps were discretised in such a way that the elements in there matched those in the iron parts. The current densities in the exciting coils were chosen to be the same as in the previous case and as expected the flux densities thus obtained were only a fraction of the values found in the geometry without joints. The air gap increased the reluctance of the magnetic path considerably. Computation was also carried out with the B-H characteristic of another isotropic material and at the moment both the experimental and computational results are being analysed.

4. CONCLUSIONS

Both the experimental and numerical work has been carried out on a simple 3-limb transformer geometry without any joint at T sections or corners and the material chosen was isotropic. The results obtained by the computational method agreed with the experimental results in the case of the fundamental component of flux; but there was discrepancy in the case of the third harmonic flux vectors; though in both methods the latter was found to circulate in the T sections. The x and y components of total flux were computed at an interval of 10° over a magnetizing cycle. The accuracy can be largely improved by choosing an interval of 5° . Flux transfer from layer to layer due to the joints is one of the most important things to consider and therefore, at present, work is being carried out to include the T and corner joints in the programme. At a later stage, three dimensional solution will be attempted for several layers. The experimental results on transformer models published previously would be then directly compared with the computed results. When the distribution of flux in and normal to the plane of the laminations in a transformer core is well understood, the localised losses can be calculated from the knowledge of loss data under different flux conditions. A significant part of the core loss can be attributed to the stress in the lamination^{12,13} and in order to obtain more thorough knowledge of localised loss distribution it is desirable to include the effect of stress.

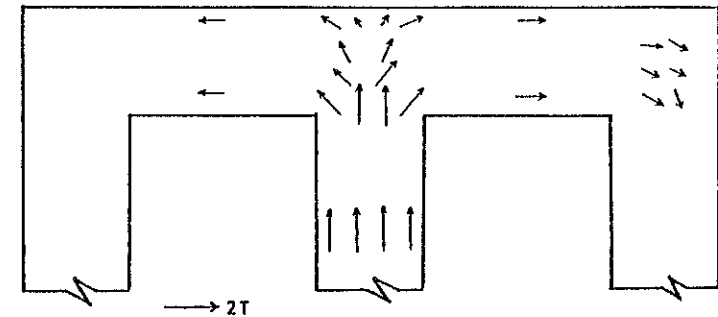


Fig. 5 - Magnitude and direction of fundamental component of fluxes obtained by numerical method, at an instant when $\omega t = 0^\circ$.

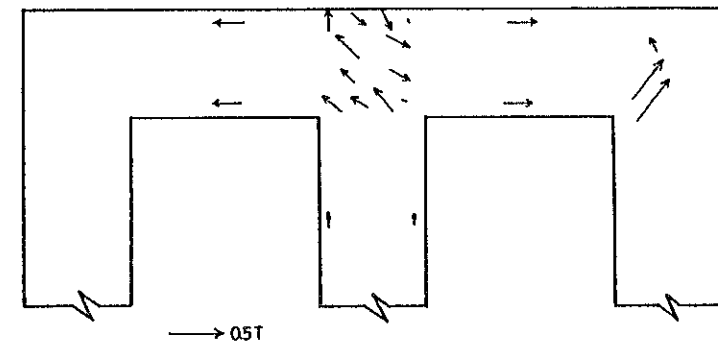


Fig. 6 - Magnitude and direction of third harmonic component of fluxes obtained by numerical method, at an instant when $\omega t = 0^\circ$.

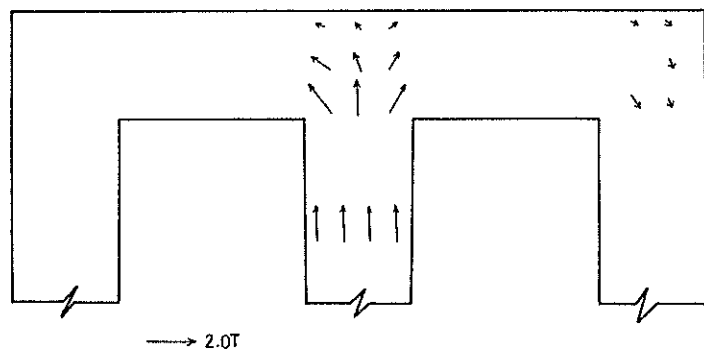


Fig. 7 - Fundamental flux vectors obtained experimentally, at an instant when $\omega t = 0^\circ$.

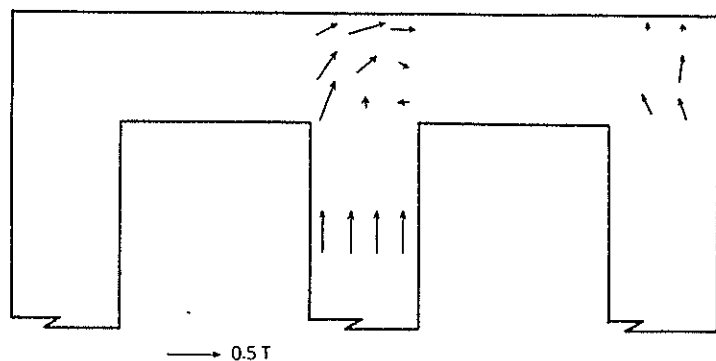


Fig. 8 - Third harmonic flux vectors obtained experimentally, at an instant when $\omega t = 0^\circ$.

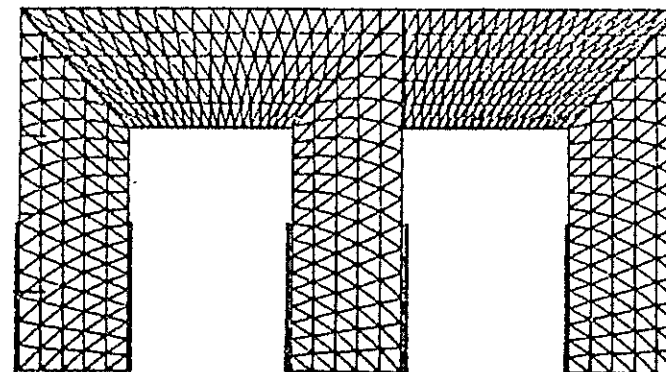


Fig. 9 - Discretised transformer geometry with T and corner joints.

Eventually, the techniques will be used to investigate the flux and loss distribution in various types of joints employing different kinds of electrical steel laminations.

5. ACKNOWLEDGEMENT

The authors are grateful to Mr. J. Simkin and Mr. C.W. Trowbridge of Rutherford Laboratory for their interest and encouragement in this work.

6. REFERENCES

1. Basak, A. and Moses, A.J. Harmonic Losses in Three Phase Transformer Cores, IEEE Trans. Mag., vol. MAG-14, no. 5, September 1978.
2. Moses, A.J. and Thomas, B. Problems in the Design of Power Transformers, IEEE Trans. Mag., vol. MAG-10, no. 2, June 1974.
3. Brailsford, F. and Mazza, V.R. The Alternating Magnetic Flux Distribution in Right-Angled Corners of Transformer Laminations, Proc. IEE, 109A, 1962, pp173-180.
4. Jones, M.A., Moses, A.J. and Thompson, J.E. Flux Distribution and Power Loss in the Mitred Overlap Joint in Power Transformer Cores, IEEE Trans. Mag., vol. MAG-9, no. 2, June 1973.

5. Basak, A. and Moses, A.J. Effect of Normal Flux on Power Loss in Grain-Oriented Silicon-Iron Laminations, IEE Conf. Proc. no. 142, September 1976, pp33-36.
6. Thomas, B. Flux Paths and Flux Transfer Mechanism in the T Joints of Three Phase Transformer Cores, IEEE Trans. Mag., vol. MAG-11, no. 1, January 1975.
7. Weggler, P. Computation of Magnetic Fields in Non-Linear Anisotropic Media with Field-Dependent Degree of Anisotropy, Proc. Compumag, St. Catherine's College, Oxford, 31st March-2nd April 1976, pp168-176.
8. Johns, P.B., Wright, A. and Stich, J.E. The Determination of Magnetic Fields in Power Transformers, Proc. Compumag, St. Catherine's College, Oxford, 31st March-2nd April 1976, pp261-266.
9. Nakata, T., Ishihara, Y. and Takahashi, N. Analysis on Magnetic Characteristics of Single-Phase Four-Limbed Transformer Cores, Conference on Soft Magnetic Materials 3, Bratislava, Czechoslovakia, 14th-16th September 1977.
10. Simkin, J. and Trowbridge, C.W. Which Potential - A Comparison of the Various Scalar and Vector Potentials for the Numerical Solution of the Non-Linear Poisson Problem, Rutherford Laboratory Report No. RL-78-099/B, January 1978.
11. Moses, A.J., Thomas, B. and Thompson, J.E. Power Loss and Flux Density Distributions in the T Joints of a Three Phase Transformer Core, IEEE Trans. Mag., vol. MAG-8, no. 4, 1972, pp785-790.
12. Moses, A.J. Effects of Stresses on Magnetic Properties of Silicon-Iron Laminations, J. Mater. Sci., 1974, 9, pp217-222.
13. Basak, A. and Moses, A.J. Influence of Stress on Rotational Loss in Silicon-Iron, Proc. IEE, vol. 125, no. 2, February 1978, pp165-168.

TWO-DIMENSIONAL FLUX PENETRATION INTO SATURATING IRON

E.M. Deeley and D.A. Lowther
(Dr. E.M. Deeley is with King's College, London.)
(Dr. D.A. Lowther is with Imperial College, London.)

ABSTRACT

Studies have been made of the mechanism of flux penetration into saturating iron using a differential method, for materials having magnetization characteristics which can be represented firstly by a step-function, and secondly by the well-known Fröhlich expression. The results using a step-function approximation have assisted the development of a model of two-dimensional penetration which will enable a method of computation to be developed which makes use of field parameters only at the surface of the iron. The results using the Fröhlich expression are compared with experimental results from a test rig.

1. INTRODUCTION

In many calculations of eddy-current losses in machines and other magnetic structures it is necessary to take account of the saturation of the iron to obtain sufficient accuracy. The mechanism of flux penetration for a sinusoidal surface magnetic field has been examined in a one-dimensional situation for a medium having a B-H characteristic in the form of a step function^{1,2}, the behaviour being explained in terms of a wave-front which penetrates the medium from the surface in front of which the electric field is zero. Behind this wavefront the electric field varies with time, but at any instant is the same throughout the medium. Another study has shown that for a given saturation flux density the eddy-current loss calculated from this model is larger than that using a more practical form of B-H curve, and a universal loss chart for one-dimensional penetration has been prepared by approximating the practical B-H curve to the well-known Fröhlich curve³.

The present contribution describes a field computation which has been used to study the process of flux penetration in two dimensions into a medium represented by a step-function B-H characteristic, and also to compare computed flux penetrations with those measured for a particular experimental arrangement, for which the B-H curve of the material is represented by the Fröhlich expression. A differential method based on finite differences has been used as the formulation is more straightforward than the finite element method for the relatively simple geometrical arrangements studied.

2. THE COMPUTATIONAL METHOD

Methods for computing the penetration of flux into non-linear media have been described by several authors, the nonlinearity

being represented either by an analytic expression⁴ or by a piecewise-linear model⁵⁻⁹. The essential features of the method used in the present study have been described previously¹⁰ in which the nonlinearity is represented by an expression of the Fröhlich type:

$$B = \frac{H}{a+b|H|^n} + cH \quad \dots\dots\dots(1)$$

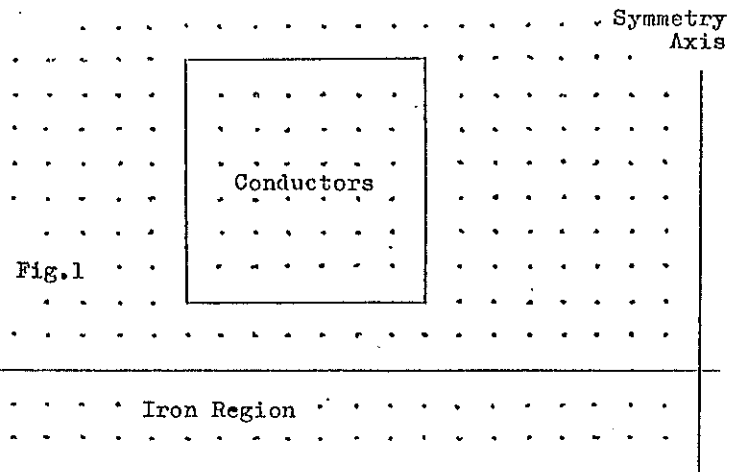
Because of convergence problems it has been found impracticable in the present study to use the step-function nonlinearity directly and the function is approximated by using small values of the constants a and c in equation(1). In the iterative adjustment of vector potential values at each node successive overrelaxation is combined with a Newton-Raphson method for calculating the adjustment required, which leads to a rate of convergence approaching that for a linear problem having the same geometry. The advantages of the Newton Raphson method have been pointed out before in relation to finite-element methods^{5,7} and in general leads to more rapid convergence than when separate under-relaxation of reluctivities is employed. The method remains satisfactory even for severe nonlinearity approaching the form of a step function, although a somewhat smaller value of acceleration factor must be used in the earlier stages of the iteration which is then allowed to increase towards the optimum value as the iteration progresses. For the steel used in the experimental arrangement the values of a , b and c in equation (1) have been determined experimentally.

3. WAVEFRONT MODEL OF FLUX PENETRATION

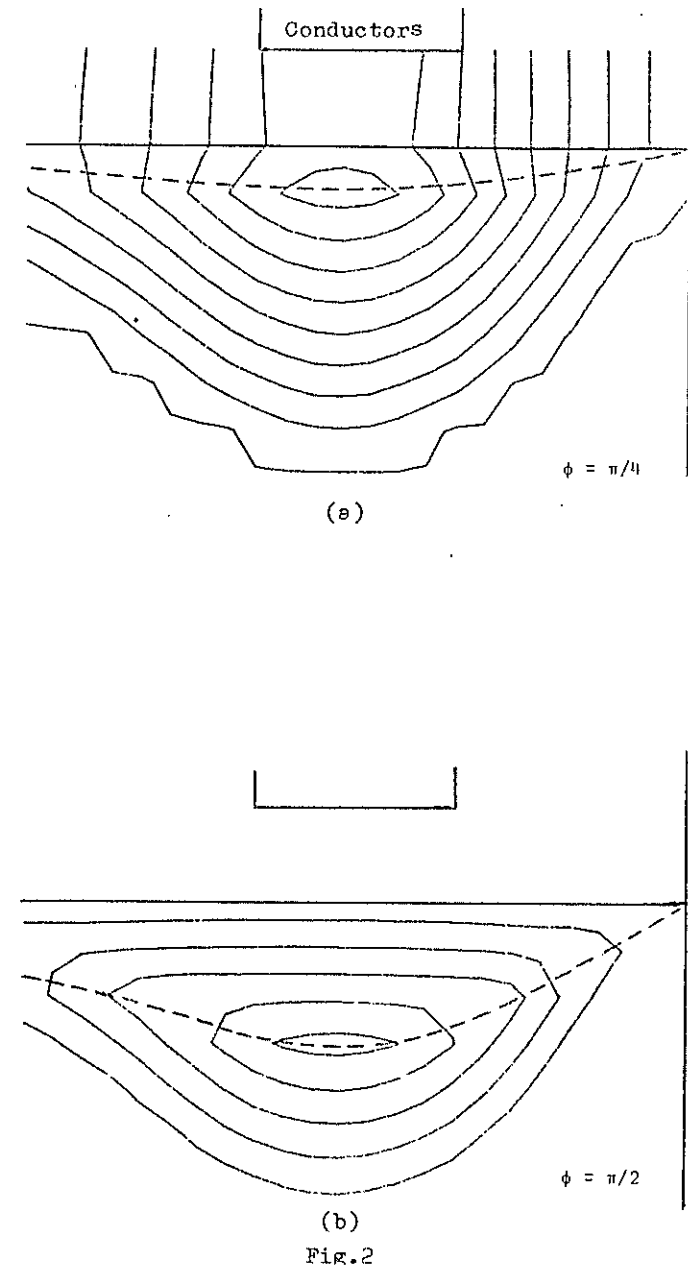
A one-dimensional model of flux penetration into iron having a step-function B-H curve has been studied by Maclean¹ and by Agarwal². This penetration is characterized by a wavefront which sweeps into the medium and at which the flux reverses suddenly in direction, being returned to its original direction only on the arrival of the next wavefront. A wavefront moves into the medium from the surface whenever the surface tangential magnetic field passes through zero, giving two wavefronts per cycle of excitation. These wavefronts penetrate to a certain maximum depth, beyond which the flux density from this source is at all times zero.

The present computational method has been used to obtain an understanding of penetration in two dimension into such a medium. This is important for the purposes of reducing flux penetration into non-linear media to surface models, and although for iron surfaces under many conditions a one-dimensional model is adequate, a two-dimensional model is necessary in some situations such as close to corners, in small structures and when the conductivity is low. The arrangement studied comprises two parallel bundles of conductors carrying opposite currents, situated in air above a semi-infinite medium. The half region to the left of the symmetry axis is illustrated in fig 1, the whole region being represented by a 35x40 square mesh with the conductor bundle

situated two node spacings above the medium as shown. The medium extends to a depth of 15 nodes. Zero vector potential is imposed along the boundaries of the region representing the symmetry axis on the right and the unpenetrated medium along the lower boundary. The other two boundaries are sufficiently far removed from the conductor to have only a small effect on the resulting flux distribution which does not in any case affect the conclusions to be drawn. Two-dimensional conditions are produced in this system by using a sufficiently large excitation, and each half cycle is divided into 16 time steps. Transients last for approximately one-quarter of a cycle in these severely nonlinear conditions, and equipotential distributions obtained under steady-state conditions are illustrated in Fig. 2. Four distributions are shown, for $\phi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ and π , where the phase $\phi = 0$ corresponds to the peak value of exciting current. The approximate position of the wavefront is illustrated by the broken line in each diagram, and its progress into the medium over one-half cycle is demonstrated. The distribution remaining from the previous penetration is progressively overtaken by the new wavefront with a new distribution forming behind it.



The relationship which must exist between the old and the new distributions at the wavefront is also illustrated in these figures. It can easily be shown that an equipotential crossing the wavefront suffers a discontinuous change in direction so that it makes the same angle with the wavefront on either side of it. This feature is not obvious at every point of intersection of the wavefront and the equipotentials shown in Fig. 2 because of the interpolation performed to plot them within the mesh of nodes. As the surface potentials change it is this equal-angle requirement, together with that for equally spaced equipotentials, that determines the exact form and progress of the wavefront. The flux density vector at any point therefore experiences a sudden jump



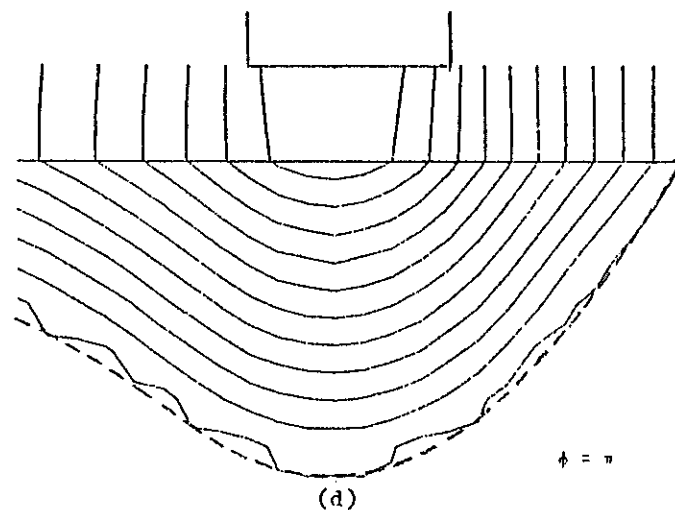
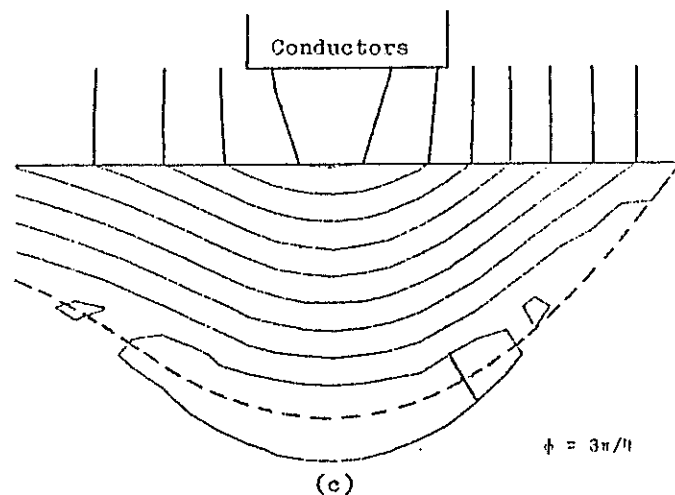


Fig.2(cont^d)

through an angle of between 0° and 180° (depending on position) as the wavefront passes, followed by a continuous rotation until the total rotation is 180° . Below that point on the surface where the field has its maximum value the discontinuous part of the rotation can reach 180° , whereas away from these regions the discontinuous rotation is smaller.

In many practical situations involving iron the depth of penetration is small compared with other dimensions so that over plane surfaces the mechanism described above is compressed into a narrow region. The equipotentials are then everywhere nearly parallel to the surface and the whole process becomes an aggregate of one-dimensional processes. This is not true at and near corners however, where the equipotentials make significant angles with the surfaces.

The features outlined above enable surface equations to be written for plane surfaces and for corners, which for problems involving solid iron obviate the need to compute nodes within the iron region. This use of these equations will be described elsewhere.

4. THE EXPERIMENTAL SYSTEM

The experimental arrangement used consists of an exciting coil mounted above a stack of circular steel laminations of 30 cm outside radius, carrying a central hole through which a separate exciting conductor can be passed as illustrated in Fig. 3. This conductor enables core flux to be included in the circumferential direction as well as that penetrating the laminations due to the exciting coil. A specially prepared lamination carries a number of concentric search coils set into shallow tracks etched into both surfaces, so that the electric field at various radii and depths can be measured by arranging this lamination within the others. The voltage waveforms from each of these search coils is sampled at 80 samples per cycle and the amplitude and phase of each harmonic component computed digitally.

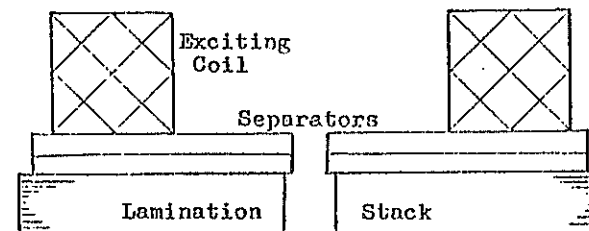


Fig.3

5. COMPARISON WITH EXPERIMENT

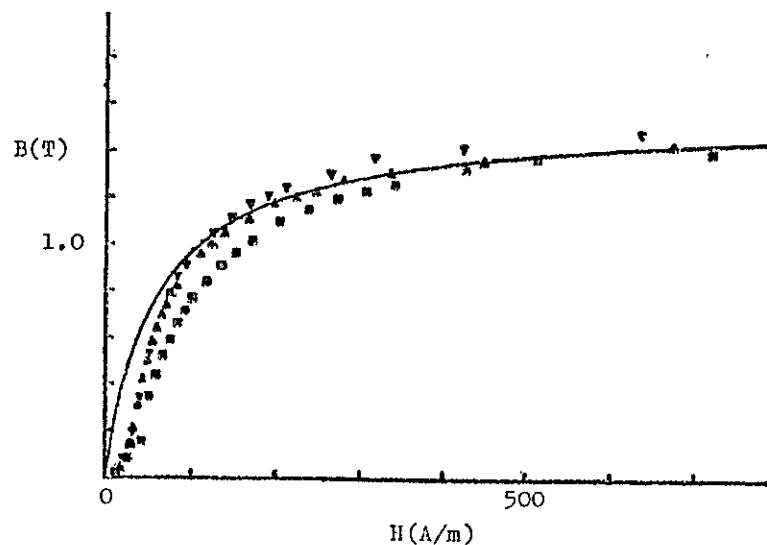
For computational purposes the experimental arrangement is represented in cylindrical geometry by a pattern of nodes similar to that shown in Fig. 1, except that a rectangular mesh is used in the lamination region to correspond to the lamination thickness. A further air region is included below the laminations as in the experimental arrangement. For a given excitation a comparison has been made of the fundamental and third harmonic components of electric field as a function of radius at various levels within the lamination stack. The excitation corresponds to that giving a maximum peak value of surface tangential magnetic field of about 7500 A/m under the exciting coil. Experimental points on the B-H curve for the steel are shown by the squares and triangles in Fig. 4, while the solid line corresponds to the Frohlich expression used to fit these points. Referring to equation 1 the constants used to produce this curve are:

$$a = 1/20000\mu_0$$

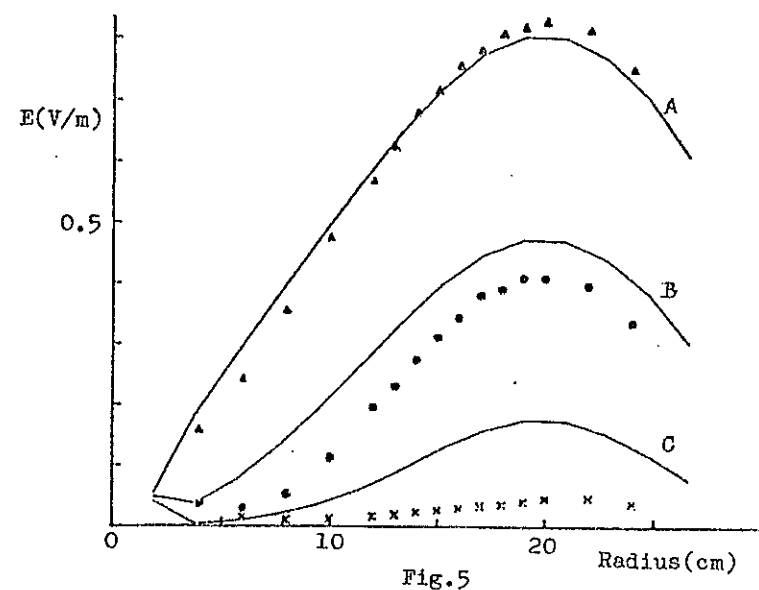
$$b = 1/1.53$$

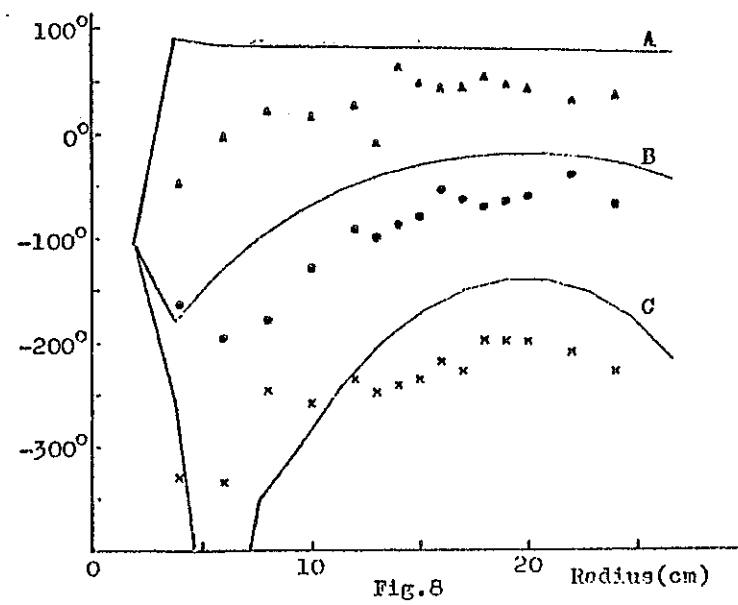
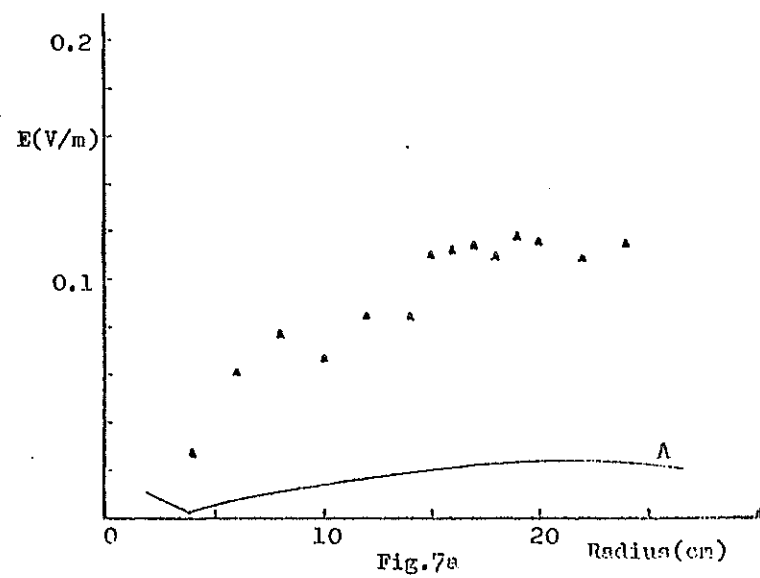
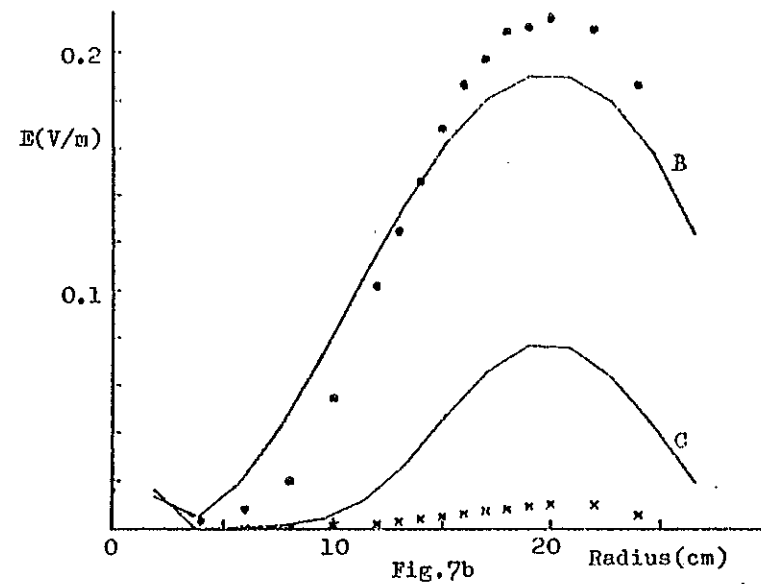
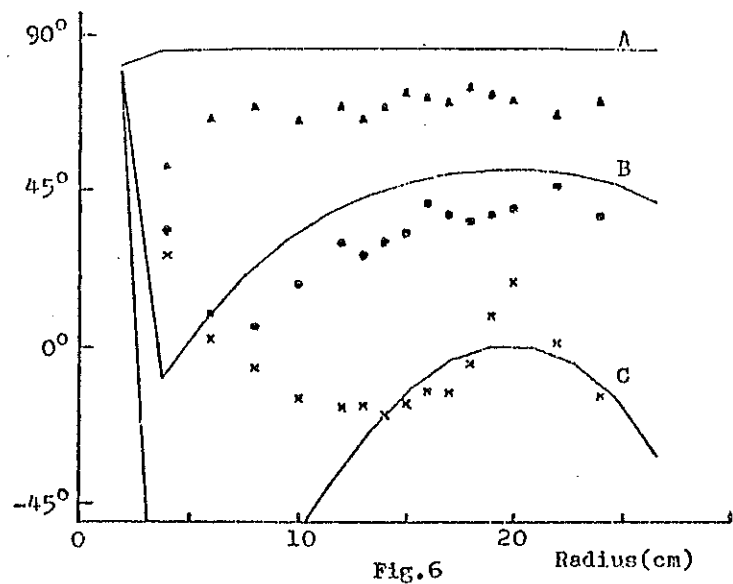
$$c = 20.5\mu_0$$

where μ_0 is the permeability of free space. Also used was the measured value of conductivity of 1,350,000 S.



Illustrated in Fig. 5 is the variation in amplitude with radius of the fundamental component of magnetic field on the surface of the laminations and at two levels within the stack. For the surface values the computed results represented by curve A and the experimental values shown by the neighbouring triangles are in close agreement. Curves B and C show the computed amplitudes below the third and sixth laminations respectively, with experimental results (shown by circles and by crosses respectively) in good agreement below three laminations and less so below six. The computed flux density is quite sensitive to changes in magnetic properties at greater depths however, so this amount of disagreement is not unexpected. The central hole is only crudely modelled in the computer simulation being only one node separation in radius, but there is agreement in the form of the results obtained in this region. The phase of the fundamental component of electric field with respect to that of the exciting current is shown in Fig. 6 at the same three levels, the same trend being followed by computed and experimental results although with some small differences.





The amplitudes and phases of the third harmonic component of electric field are shown for the same levels in Figs. 7 and 8, the surface values of amplitude being separated (in Fig. 7a) from those for the lower levels (Fig. 7b) for clarity. A small third harmonic component present in the excitation current of the experimental system is included in the computer simulation, but even so the predicted values on the surface are considerably less than those observed experimentally. Much better agreement is found below the third lamination (curve B of Fig. 7b) while at the lowest level (curve C) the computed results are higher, reflecting the same effect noted for the fundamental component. The variations in phase shown in Fig. 8 are also in general agreement with respect to both radius and depth.

CONCLUSIONS.

The wavefront approach which has been used to explain one-dimensional penetration into saturating iron can be extended to the two-dimensional situation when the B-H characteristic can be regarded as a step function. The flux pattern or 'footprint' impressed during a half-cycle of excitation is overtaken in the next half-cycle by a wavefront behind which the new flux distribution appears. It is shown that equipotentials crossing this wavefront do so with a discontinuous change in direction such that the angles made on each side of the wavefront are equal and this, together with the surface potential distribution, defines the position of the wavefront and of the new flux distribution developing behind it. Field computations illustrate this process and provide field waveforms at the surface of the medium.

From the insight gained into the penetration process it is possible to develop surface equations which can be used to replace lengthy computations made within the medium. These can be used in either an integral or a differential time-stepping method to find the field distribution, and this will be described in greater detail elsewhere.

The penetration of flux into a stack of steel laminations has been studied both experimentally and by computation and the results compared. Good agreement is obtained for the amplitude of the fundamental component of electric field, and although certain differences have yet to be explained reasonable agreement for the phase of the fundamental, and for the amplitude and phase of the third harmonic component, are obtained.

REFERENCES

1. MACLEAN W. "Theory of Strong Electromagnetic Waves in Massive Iron" Jour. of App. Phys. 25 pp 1267-70 (1954)
2. AGARWAL P.D. "Eddy-Current losses in Solid and laminated Iron" Trans. A.I.E.E. (pt.I) 78 pp 159-81 (1959)
3. LIM K.K. & HAMMOND M.A. "Universal loss Chart for the Calculation of Eddy-Current losses in Thick Steel Plates" Proc. I.E.E. 117 pp 857-64 (April 1970)
4. MJLHAUS M.A. "On the Solution of 2-Dimensional Saturable Eddy-Current Problems by the a.d.i.-Technique" Proc. I.E.E. 123 pp 183-186 (Feb. '76)
5. CHARI M.V.K. & SYLVESTER P. "Analysis of Turboalternator Magnetic Fields by Finite Elements". Trans I.E.E.E. PAS-90 (1971) pp 454-60
6. FUCHS E.F. & ERDELYI E.A. "Determination of Waterwheel Alternator Steady-State Reactances from Flux Plots" Trans. I.E.E.E. PAS-91 (1972) pp 2510-2518
7. HANALLA A.Y. & MACDONALD D.C. "Numerical Analysis of Transient Field Problems in Electrical Machines" 123 pp 893-89 (Sept. 1976)
8. YEE H. & WILSON T. "Saturation and finite Length Effects in Solid Rotor Induction Machines" . Proc. I.E.E. 119 pp 877-82 (July 1972)
9. ALDEFELD B. "Electromagnetic field Diffusion in Ferromagnetic Materials" Proc. I.E.E. 125 pp 278-282 (April 1978)
10. DEELEY E.M. & HAYALI L. "Fields involved in magnetic recording on moving steel strip" Proceedings of Compumag Conference. pp 183-90 (Oxford '76)

PROCEDE D'ANALYSE DES CHAMPS ELECTROSTATIQUE
ET MAGNETOSTATIQUE DANS LES STRUCTURES PLANES
ET DE REVOLUTION : PROGRAMME DIFIMEDI

M. LAJOIE-MAZENC - J. HECTOR - R. CARLSON
Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique
Industrielle - 2 rue Camichel 31071 Toulouse-Cédex
ERA CNRS n° 536

RÉSUMÉ

Le programme DIFIMEDI présenté permet le calcul des champs électrostatique et magnétostatique à partir d'une description systématique de la structure étudiée. La procédure proposée est suffisamment générale pour autoriser le traitement de systèmes plans et de révolution comportant des courants et/ou des aimants permanents ainsi que la prise en compte des conditions aux frontières du domaine d'étude les plus courantes. Les équations aux dérivées partielles du potentiel, discrétisées par la méthode des différences finies, sont résolues par une méthode directe utilisant un stockage dans une structure à chaînage.

Au niveau de l'analyse des résultats, il est possible de visualiser les lignes équipotentielles au moyen de programmes de tracés. Mais en outre, le procédé proposé est suffisamment performant pour permettre la réalisation de films d'animation visualisant le mouvement des lignes d'induction dans des circuits magnétiques comportant une partie mobile.

1 - INTRODUCTION

Le but proposé lors de la conception du programme DIFIMEDI a été la mise au point d'un outil d'analyse des propriétés fondamentales de structures magnétiques. Ce besoin d'analyse apparaît en effet au cours des études que nous développons sur les machines spéciales à commutation électronique pour lesquelles il est nécessaire, dans une première phase, de vérifier les principes de fonctionnement avant d'aborder un calcul prenant en compte tous les détails de la structure.

Dans cette optique, nous avons cherché à rendre aussi simple que possible la mise en oeuvre du calcul du champ dans les systèmes les plus couramment rencontrés en électrotechnique, quitte à ce que cela conduise à simplifier légèrement, dans certains cas, la structure étudiée. Cette préoccupation correspond au besoin que nous ressentons de posséder un outil relativement performant mais surtout d'emploi suffisamment aisé pour ne pas hésiter à faire souvent appel à lui. Pour cela, nous pensons que les conditions suivantes doivent être remplies :

- Possibilité de prendre simplement en compte la plus grande variété de types de problèmes,
- Description simple et rapide de la structure,
- Ecriture et résolution systématique des équations à partir de cette seule description.

- visualisation immédiate des résultats.

L'originalité du programme DIFIMEDI réside surtout dans le fait qu'il a été conçu pour essayer de répondre aux critères que nous venons d'énoncer.

2 - PRESENTATION DES PROBLEMES TRAITES

En considérant tout d'abord le champ magnétostatique, les sources prises en compte sont les courants, caractérisés par leur densité volumique $\vec{J}$, et les aimants permanents, caractérisés par leur aimantation $\vec{M}$ (fonctionnement sur une droite de recul connue). En utilisant le potentiel vecteur $\vec{A}$ et en introduisant la réductivité ν des différents milieux, l'équation du champ magnétostatique est :

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}) = \vec{J} + \text{rot} \nu \vec{M} \quad \text{avec en général } \nu = \nu(\vec{A})$$

Le programme que nous présentons permet la résolution de cette équation pour les systèmes à deux dimensions : plans et de révolution. Les premiers peuvent être représentés en utilisant soit les coordonnées cartésiennes x, y soit les coordonnées polaires r, θ alors que les deuxièmes sont représentées en coordonnées cylindriques r, θ, z dans le plan r, z . Dans les deux cas, le potentiel vecteur n'a qu'une seule composante et son équation aux dérivées partielles s'écrit facilement en fonction des sources $\vec{J}$ et $\vec{M}$. La prise en compte des conditions aux frontières du domaine d'étude absolument quelconques n'étant pas facile dans une description systématique, nous n'avons retenu que les cas les plus typiques suivants :

- conditions de Dirichlet sur les quatre côtés,
- conditions de Dirichlet sur trois côtés + condition de Neumann sur le quatrième côté,
- condition de Dirichlet sur deux côtés opposés + (anti) périodicité sur les deux autres côtés.

Ces différents cas permettent, en particulier, de traiter la plupart des problèmes propres aux machines électriques. Remarquons enfin que la prise en compte de systèmes dont les équations sont formellement identiques à celles décrites ci-dessus est immédiate. Nous citerons en particulier les systèmes magnétiques et électriques décrits avec le potentiel scalaire, la réductivité étant alors remplacée par la perméabilité ou la constante diélectrique.

3 - PRESENTATION DE LA METHODE DE RESOLUTION

La méthode de discrétisation retenue est celle des différences finies avec résolution directe du système d'équations. Dans ce cas, la prise en compte de la non-linéarité due à la dépendance $\nu = \nu(\vec{A})$ peut s'effectuer par le procédé de la quasilinearisation. La procédure décrite ici concerne uniquement la résolution du problème linéaire (c'est aussi une étape du calcul au cours du procédé de quasilinearisation).

Toujours avec le souci de simplifier la mise en oeuvre de la méthode numérique, le processus adopté utilise des maillages possédant les propriétés suivantes :

- le maillage est réalisé en utilisant uniquement des lignes de coordonnées du système de repérage choisi,
- chacune de ces lignes traverse le domaine de part en part,

- les limites de discontinuité entre deux milieux de caractéristiques différentes (réductivités, courants, aimants) coïncident avec les lignes du maillage.

Ces conditions peuvent apparaître très restrictives car elles conduisent parfois à modifier légèrement la structure du système étudié. Cependant, par expérience et en fonction du but recherché (analyse des propriétés fondamentales des circuits magnétiques) nous pensons qu'il est préférable de rechercher une mise en oeuvre la plus simple et la plus systématique possible plutôt qu'une précision souvent illusoire.

L'utilisation d'une méthode directe de résolution nécessite la construction de la matrice des coefficients du système et de la matrice des seconds membres (sources). Le problème principal de la méthode directe étant un problème de taille mémoire et de temps de calcul, il faut tirer au maximum parti des propriétés particulières de la matrice des coefficients. Dans tous les cas envisagés, la matrice est très creuse et présente une structure bande. La durée du calcul étant directement liée à la largeur de cette bande, le programme détermine automatiquement le rangement des inconnues qui minimise cette largeur de bande. Le choix entre un rangement suivant les lignes verticales ou horizontales prend en compte les nombres respectifs des lignes verticales ou horizontales ainsi que la nature des conditions à la frontière du domaine.

En ce qui concerne la définition des sources, le programme permet la construction de plusieurs matrices des seconds membres correspondant pour un même système à différentes combinaisons d'aimants et de courants. En effet, dans le cas d'un système linéaire, les solutions pour plusieurs seconds membres peuvent ainsi être trouvées à partir d'une seule inversion de la matrice. Ceci permet une économie considérable en temps de calcul pour l'analyse d'un système magnétique dans lequel la saturation n'existe pas ou n'est pas le phénomène principal (par exemple analyse de la forme de la courbe de variation du couple en fonction de la position rotor-stator d'une machine électrique).

4 - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE RESOLUTION

L'algorithme de résolution choisi est l'algorithme classique de triangularisation de Gauss d'application suffisamment générale pour englober tous les cas envisagés ici. L'utilisation d'une structure à chaînage permet le stockage des seuls éléments non nuls de la matrice tout en rendant possible toutes les opérations nécessaires à la triangularisation de cette matrice : création, recherche, modification, suppression des éléments.

En outre, afin de minimiser le nombre d'opérations, il est automatiquement tenu compte dans l'application de l'algorithme des propriétés particulières des matrices relatives aux différents cas traités : largeur de la bande et symétrie. On évite ainsi par exemple la recherche dans la structure à chaînage d'éléments dont on peut prévoir a priori qu'ils n'existent pas.

Un des problèmes principaux de la méthode directe pouvant souvent être la taille mémoire disponible, une procédure de délestage automatique sur disque a été mise au point. Cette procédure qui tient compte du déroulement chronologique des opérations permet pratiquement de se libérer des contingences de place pour les systèmes com-

portant un grand nombre de noeuds.

Nous signalerons enfin qu'au cours de la résolution, c'est l'opération de triangularisation de la matrice qui prend le plus de temps. En effet, le temps d'obtention de la solution par élimination à partir de la matrice triangularisée est relativement réduit. Aussi, on peut traiter simultanément plusieurs seconds membres sans une augmentation prohibitive du temps de calcul. Nous avons souvent tiré profit de cette possibilité pour l'analyse de systèmes électromécaniques non saturés.

5 - UTILISATION PRATIQUE

Le processus de calcul se déroule en trois phases indépendantes et complémentaires : entrée des données, résolution, sortie des résultats. La résolution est complètement automatique, les données et les résultats peuvent être sauvegardés pour une utilisation ultérieure. Le programme DIFIMEDI peut être exploité au moyen d'un programme principal sur cartes perforées ou sous forme conversationnelle à partir d'une console graphique.

La préparation des données qui consiste à définir le système physique étudié conformément aux conventions adoptées comporte les étapes suivantes :

- définition du type de problème (sous forme d'indices ou de questions et réponses correspondant aux différentes conditions aux frontières ci-dessus envisagées),
- définition du système de coordonnées (sous forme d'indices ou de questions et réponses correspondant aux trois systèmes retenus : $x, y, r, \theta, r, \varphi$),
- définition du maillage (nombre de lignes et coordonnées de ces lignes),
- garnissage des réductivités des différentes mailles,
- garnissage des différentes configurations de sources,
- appel de la procédure de résolution.

Dans la version conversationnelle les possibilités graphiques de la console sont largement utilisées.

A titre documentaire, la préparation du calcul d'une machine électrique semblable à celle représentée sur la figure ci-dessous demande dans la version utilisant les cartes perforées, environ 50 instructions Fortran et ne nécessite pas, dans la version conversationnelle plus de 10 minutes.

6 - EXPLOITATION DES RESULTATS

Des sous-programmes permettant l'exploitation des fichiers de résultats sauvegardés sont en cours de développement en ce qui concerne le calcul des grandeurs physiques (flux, forces...). Un effort particulier a été fait en ce qui concerne les tracés des équipotentielles. Ceux-ci peuvent être obtenus en ligne sur imprimante ou sur console et hors ligne sur traceur.

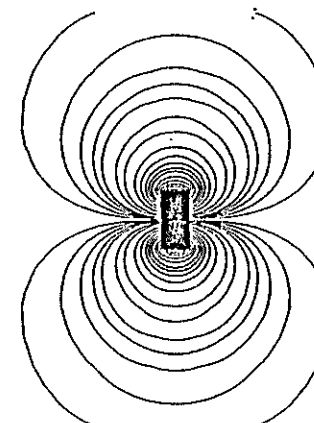
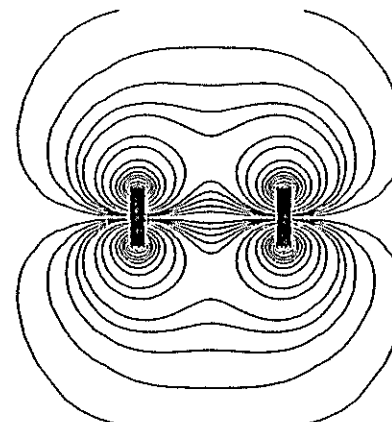
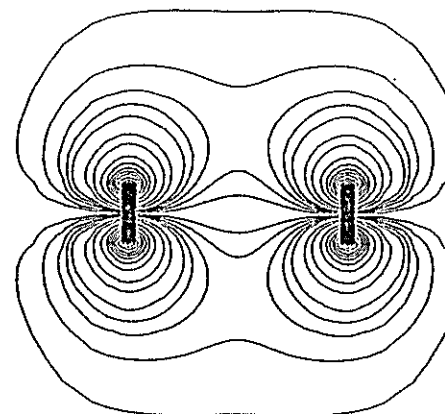
L'ensemble du procédé ainsi mis sur pied s'est révélé suffisamment performant pour obtenir sans dépenses excessives un nombre relativement important des tracés. Ceci nous permet d'envisager le tournage de films d'animation visualisant le mouvement des lignes d'induction dans des circuits magnétiques comportant des parties mobiles.

Un premier film a déjà été réalisé par les auteurs et présenté à Com-pumag : "Equiflux en liberté".

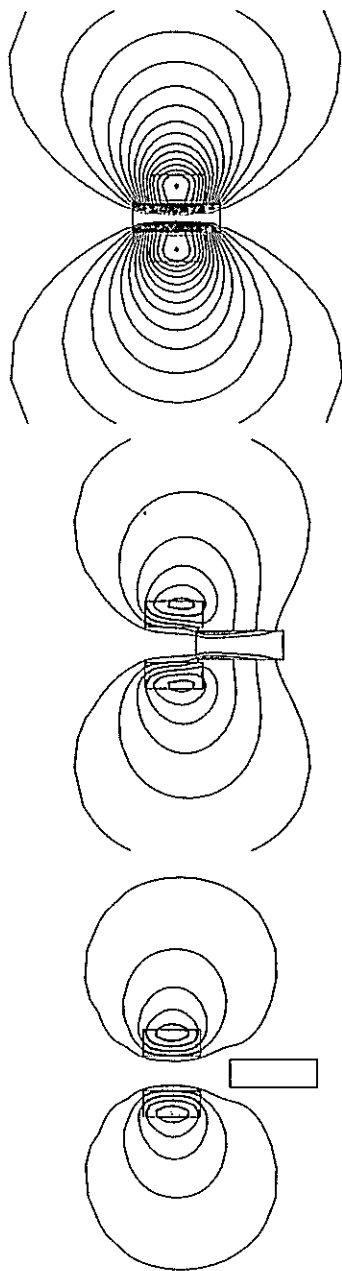
Dans ce court-métrage (7minutes) sont montrés successivement :

- l'attraction et la répulsion de deux aimants permanents en ferrite,
- le mouvement du noyau d'une inductance à noyau droit,
- le fonctionnement d'un prototype de machine à aimants permanents lors d'une marche à vide, d'une alimentation à courant constant et d'une alimentation par convertisseur statique,
- la figure ci-dessous montre quelques tracés extraits de ce film.

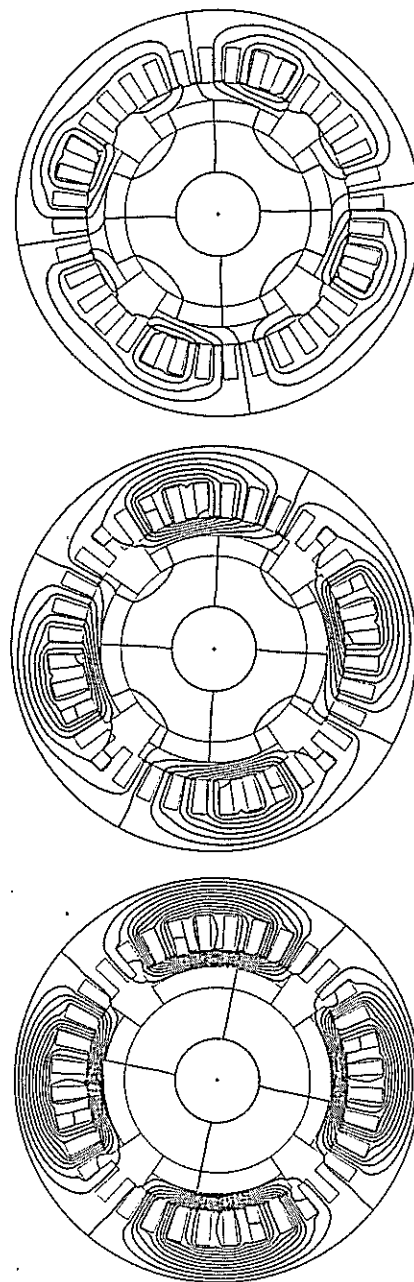
L'animation du champ magnétique par ce procédé cinématographique constitue, à notre avis, (et l'examen de ce premier film le confirme) un outil d'analyse plus approfondie que le simple examen des tracés si-gés qui traduisent assez mal le caractère dynamique des machines tour-nantes. Aussi, nous envisageons de poursuivre dans cette voie pour laquelle le procédé DIFIMEDI nous semble relativement bien adapté.



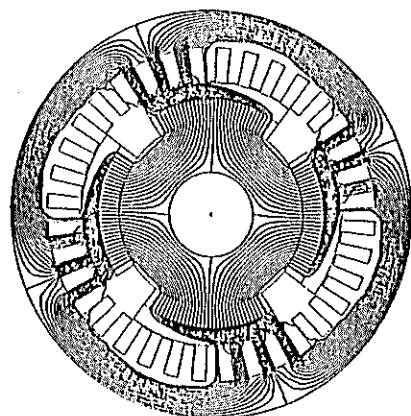
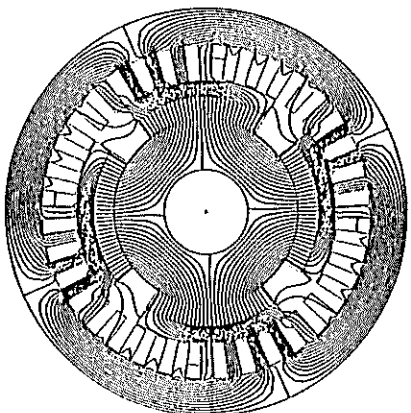
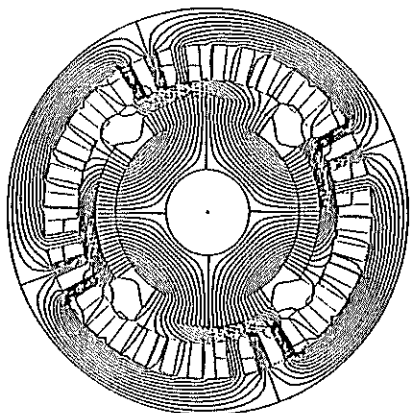
AIMANTS FERRITE
EN ATTRACTION



INDUCTANCE A NOYAU
DROIT



MACHINE ALIMENTEE A
COURANT CONSTANT



MACHINE A COMMUTATION
ELECTRONIQUE

COMPUTATION OF THREE-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELD IN POWER TRANSFORMERS

M. Lovenjak

Elektrotehnički institut "R. Končar", Zagreb, Yugoslavia

ABSTRACT

By the application of the scalar magnetic potential function the three dimensional distribution of leakage flux of a power transformer was computed. Only one phase was taken into consideration, while eddy currents, hysteresis, nonlinearity and anisotropy of steel were neglected. The field was calculated in a quarter of space of one of the transformer legs. The finite difference method in the cylindrical co-ordinate system was applied. The computation is general with respect to the core, winding and tank geometries, which makes it applicable to a transformer from the production.

Since the well known methods were applied, the paper gives only some principles which ensured their practical and rational application. A method of field transformation in a transformer with any number of windings, their arrangement and dimensions is explained. It is also shown in which way in this type of problem a uniform mesh can be applied in the computation by finite difference method. At the end, some of the computation results are given and compared with the results of the Rabin's method.

1. INTRODUCTION

Power transformers generally have several different windings. They can differ in dimensions, current direction, average current density, arrangement etc. Moreover, it often happens that the same winding is not homogeneous along its height but it consists of several homogeneous parts (sections). Such unhomogeneities are applied in order that the transformers should satisfy some basic requirements such as : withstanding of short circuit forces, of impulse voltages, limiting of overheating of windings etc. On the other hand these unhomogeneities can have essential influence on distribution of leakage flux and must not be neglected regardless of created complications in the computation.

2. MATHEMATICAL MODEL

The computation has been carried out for the transformer model shown on fig. 1. Which exhibits one quarter of the transformer

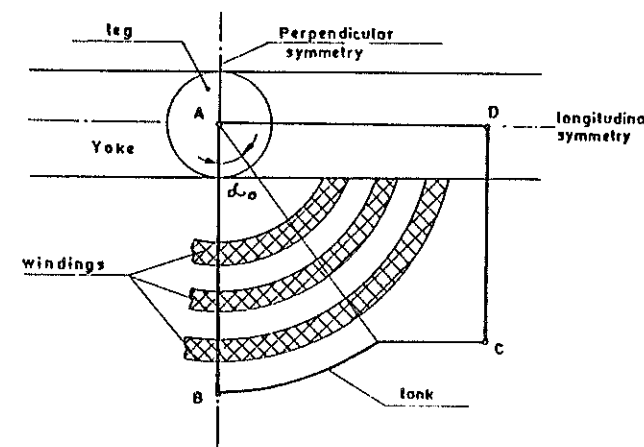


Fig.1. Transformer model

core leg area. It has been assumed that the core leg considered has two boundaries of symmetry (AB and CD) and that the core and the tank are made of ideal steel $\mu_{Fe} = \infty$ and $\chi_{Fe} = 0$. In practice, the symmetry conditions are not perfectly fulfilled, but it can be easily concluded that the unessential differences in the geometry of adjoining quarters do not have an essential influence on the field distribution in the quarter of the area considered, and that, by repeating the computation for the remaind quarters, the field distribution of the entire transformer can be obtained.

A very simple principle of defining of a mathematical model of transformer by scalar magnetic potential function for general arrangement of the windings is applied in the mentioned computation. The principle is based on the superposition method.

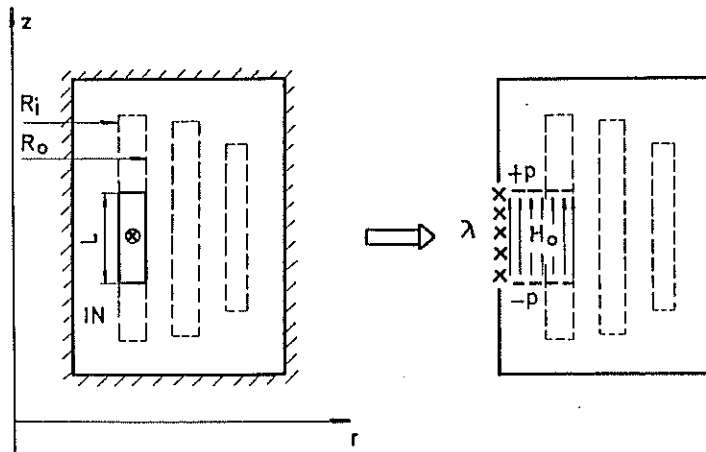


Fig.2. Field transformation process

According to the above mentioned criteria the windings are divided into sections. The procedure of field transformation is applied to each section in such a way that the currents are translated to the surface of the transformer core leg in the equivalent surface current (Fig. 2) In this case the distribution of surface density of magnetic mass (p) remains on its bases, while inside its space there is a magnetic field vector (H_o). When this procedure is carried out for all the sections, a resultant space distribution of magnetic mass density and magnetic field vector is obtained, and on the core leg there is also the resultant distribution of surface current (λ). Integration of the surface current along the height gives the distribution of the magnetic potential on the core leg:

$$\Omega_o(z) = \int_0^z \lambda(z) dz$$

It is assumed that the sum of amperturns (IN) in the transformer is equal to zero and that the value of potential in other places of the core is also equal to zero.

3. APPLICATION OF FINITE DIFFERENCE METHOD

The given mathematical model can be very easily solved by the finite difference method, but only if a uniform mesh is applied. However, in this case the limits of individual segments of winding very often will not correlate with mesh planes (Fig.3) and the section cannot be exactly defined by equivalent values in the mesh nodes.

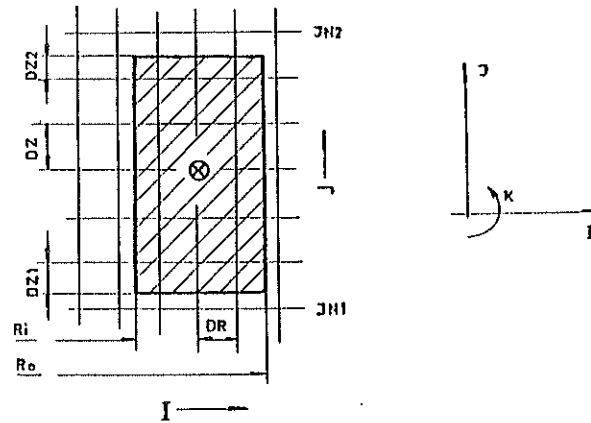


Fig.3. Winding section in the mesh plate $K = \text{const.}$

A very approximate solution (depending, of course, on selection of mesh) is obtained if the density of magnetic mass is distributed to adjacent mesh planes according to:

$$\begin{aligned} \rho(I, JN1, k) &= -\alpha_1 \cdot p(I) \\ \rho(I, JN1+1, k) &= -(1-\alpha_1) \cdot p(I) \\ \rho(I, JN2-1, k) &= (1-\alpha_2) \cdot p(I) \\ \rho(I, JN2, k) &= \alpha_2 \cdot p(I) \end{aligned}$$

where: $\alpha_1 = \frac{DZ1}{DZ}$ and $\alpha_2 = \frac{DZ2}{DZ}$, whereas $p(I)$ is the density of magnetic masses in the I -th mesh plane determined according to:

$$\begin{aligned} p(I) &= p_0 & r(I) &\leq R_i \\ p(I) &= p_0 \frac{R_i - r(I)}{R_0 - R_i} & R_i &\leq r(I) \leq R_0 \\ p(I) &= 0 & r(I) &\geq R_0 \end{aligned}$$

where: $p_0 = \frac{IN}{L}$ and $r(I)$ is the radius of I -th mesh plane. The applied procedure is checked by analytical method according to Rabins (harmonic analysis) in 2-D system, and the differences in results were negligible.

4. RESULTS

The computation has been applied to the transformer 1 ARZ 150 000 kVA. Considering that it is practically impossible to illustrate a space distribution of induction, figures 4, 5 and 6 show only few diagrams presenting the influence of space geometry on the field distribution.

Table 1 compares results of winding losses (skin-effect). Compared are results of the 2-D computation for the transformer without and with the tank, observed in the core (transversal symmetry AB). Losses (in %) are assessed on the basis of an average amount of B^2 in axial and radial direction.

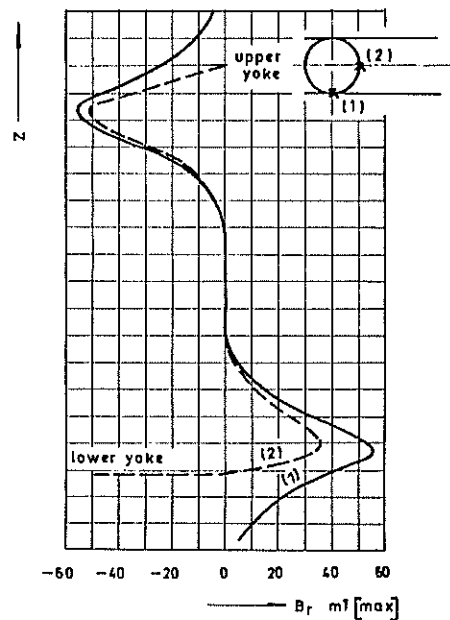


Fig.4. Distribution of radial component of induction along the core leg

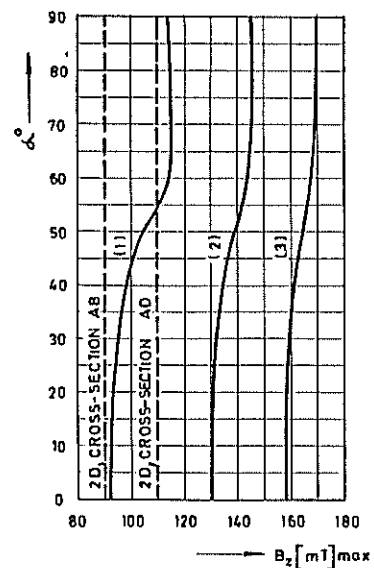


Fig.5. Distribution of axial component of induction along α direction

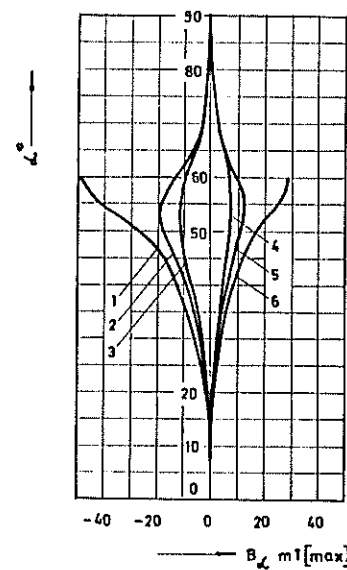


Fig.6. Distribution of α component of induction along α direction

TABLE 1. Compares results of stray losses in winding (%)

COMPUTATION	TWO - DIMENSIONAL				THRE DIMENS.
	WITHOUT TANK		WITH TANK		WITH TANK
CROSS-SECTION	AD	AB	AD	AB	—
P_r %	100	149	118	149	
P_a %	100	94	102	99	
B_r^2 %	100	137	116	145	125
B_a^2 %	100	94	102	98	99

5. CONCLUSION

The described principles have enabled elaboration of a very simple but at the same time flexible programme for computation of 3-D leakage magnetic field in power transformers.

By their application the scope of possible users of the computation becomes considerably larger, because the input data of the programme do not contain data about mesh and other data connected with the applied methods.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The autor is grateful for helpful discussion to Mr. C. J. Carpenter, Mr. J. E. Monson and Dr. M. Djurović.

7. REFERENCES

1. C. J. Carpenter: "Theory and application of magnetic shells",
PROC. IEE, Vol. 114, No.7, 1967.
2. C. J. Carpenter: "Numerical solution of magnetic fields in
the vicinity of current-carrying conductors",
PROC. IEE, Vol.114, No.11, 1967.
3. M. Djurović, and J. E. Monson: "3-dimensional computation
of the effect of the horizontal magnetic
shunt of transformer leakage fields",
IEEE Trans. on Magnetics, Vol.Mag 13,
No.5, 1977.

Takayoshi Nakata, Yoshiyuki Ishihara and Norio Takahashi
School of Engineering, Okayama University

ABSTRACT

The conventional finite elements are not suitable for the analysis of the magnetic field of a region containing very narrow air gaps. Then, a new element which is called "gap element"¹ has been conceived. The gap element has no area, but has nearly the same energy as the gap. This element is applicable to the place where its reluctivity is much larger than that of the adjacent parts and its width is also negligibly small compared with its length. The gap element has the following advantages:

- (a) It is easy to set new gaps or to modify the gap width.
- (b) More accurate solution can be obtained when the gap is very narrow.

The principle and the finite element formulation of the gap element are described. The error due to this element is discussed and the limitations of this element are also clarified. A few examples of application are shown.

The gap element is especially useful when the effect of the gap width on the magnetic characteristics of electrical machinery is investigated.

1. INTRODUCTION

Recently the flux distributions in electrical machinery have been analyzed in detail by using the finite element method^{2,3}. Very narrow air gaps often exist unavoidably in magnetic circuits. When the characteristics of such magnetic circuits are analyzed by using the conventional finite element method, the gaps are usually neglected or subdivided into small triangular elements. As the magnetic reluctance of the air gap is much larger than that of the steel part, the influence of the gap on the magnetic characteristics cannot be neglected. Therefore, the calculated results obtained by neglecting the gaps do not agree with experimental ones. If the narrow gap is subdivided into many small triangular elements, the size of matrix becomes enormous and it is not economical. Usually the microscopic characteristics in the neighborhood of the gap are not necessary, but the effects of the gap energy on the macroscopic characteristics of the magnetic circuit are the major interest. Therefore, the gap need not be subdivided into many small triangular elements.

A new element which has no area but has nearly the same energy as the gap is conceived. It is called "gap element". As this element has no area, it is easy to set new gaps on the optional positions of the subdivision or to remove some gaps from the subdivision without any re-subdivision. Moreover, the gap width can also be freely changeable. This property is especially convenient for the analysis of the effect of the gap width on the magnetic characteristics - the characteristics of the attractive force of an electromagnet for example.

In this paper, first an outline and features of the gap ele-

ment are explained. The finite element formulation for nonlinear analysis is also described. The Newton-Raphson process⁶ is used for nonlinear iterations.

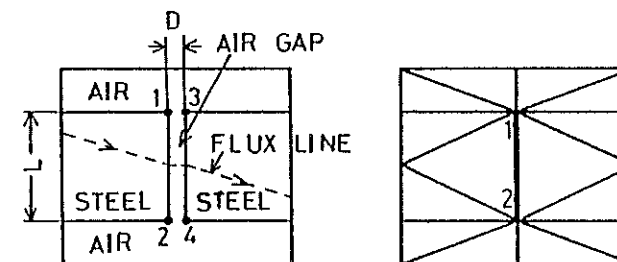
The error due to the gap element is quantitatively examined. The range of applications where the gap element is more powerful than the conventional elements is clarified.

Lastly the gap element is applied to the analysis of transformer cores with butt joints and an electromagnet in order to verify the usefulness of this new element.

2. GAP ELEMENT

A gap element is shown by the thick line 1-2 in Fig. 1(b). This element corresponds to the air gap in Fig. 1(a). It has no area, but has nearly the same energy as the gap. The gap element has the following advantages:

- (a) As this element has no area, it is easy to set new gaps on the optional positions of the subdivision or to remove some gaps from the subdivision without any re-subdivision.
- (b) As the modification of the gap width D is also easy, the influence of D on the magnetic characteristics can be easily examined by using this element.
- (c) When the gap becomes narrow enough, the accuracy of the solution is better than that obtained by using the flat triangular element.



(a) region with a gap

(b) finite element subdivision

Fig. 1. Gap element.

The reluctivity of air is thousands times as large as that of steel. Therefore, the flux in the air gap is perpendicular to the boundary between the air gap and the steel as shown in Fig. 1. Then, the following equations can be assumed among the vector potentials A_1 - A_4 at the nodes 1-4 in Fig. 1(a).

$$A_1 = A_3, \quad A_2 = A_4 \quad \text{----- (1)}$$

From the facts that the gap width is small enough and the relations among vector potentials are approximately given by Eq. (1), both nodes 1 and 3 or 2 and 4 can be moved each other to the center of them as shown in Fig. 1(b).

3. FINITE ELEMENT FORMULATION

The condition which minimizes the total energy W is given by

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{\partial W_t}{\partial A_i} + \frac{\partial}{\partial A_i} (W_g - \Delta W_g) = 0 \quad (2)$$

where A_i is the vector potential of a node i . W_t is the total apparent energy of the whole region, and it is calculated on the assumption that the reluctivity of each gap subdivided into gap elements has the same value as the adjacent steel parts respectively. W_g is the total actual energy of the gaps. ΔW_g is the total imaginary energy of the gaps, and it is calculated by using the following equation.

$$\Delta W_g = \Sigma v_g S_g B_g^2 / 2 \quad (3)$$

Where v_g and B_g are the average reluctivity and the flux density of the steel parts adjacent to the gap respectively. S_g is the area of the gap. Σ means the summation for the total gap elements. When the reluctivity of steel is much smaller than that of air and S_g is negligibly small, ΔW_g can be neglected. Then, Eq. (2) can be written as follows:

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{\partial W_t}{\partial A_i} + \frac{\partial W_g}{\partial A_i} = 0 \quad (4)$$

For Fig. 1, the energy W_g of the gap is calculated by using the following equation.

$$W_g = \frac{1}{2} v_g \left(\frac{A_1 - A_2}{L} \right)^2 L D \quad (5)$$

Where L is the length of the gap element. Then Eq. (4) can be written for the nodes 1 and 2 as follows:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial A_1} \\ \frac{\partial W}{\partial A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_t}{\partial A_1} \\ \frac{\partial W_t}{\partial A_2} \end{bmatrix} + v_g \begin{bmatrix} \frac{D}{L} & -\frac{D}{L} \\ -\frac{D}{L} & \frac{D}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

For the nonlinear analysis, quick convergence can be obtained by using the Newton-Raphson process⁶. The solution is approached by constructing the following iterative process.

$$A_i^{(K+1)} = A_i^{(K)} + \delta A_i^{(K)} \quad (7)$$

Where the superscripts denote successive iterations. δA_i is the solution of the following simultaneous equations in each step.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial A_1} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial A_N} \\ \vdots & \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} & \vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial A_N \partial A_1} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial A_N \partial A_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_i \\ \delta A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial W}{\partial A_1} \\ -\frac{\partial W}{\partial A_i} \\ -\frac{\partial W}{\partial A_N} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\partial^2 W / \partial A_i \partial A_j$ is calculated for the nodes 1 and 2 as follows:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial A_1 \partial A_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial A_2 \partial A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W_t}{\partial A_1 \partial A_1} & \frac{\partial^2 W_t}{\partial A_1 \partial A_2} \\ \frac{\partial^2 W_t}{\partial A_2 \partial A_1} & \frac{\partial^2 W_t}{\partial A_2 \partial A_2} \end{bmatrix} + v_g \begin{bmatrix} \frac{D}{L} & -\frac{D}{L} \\ -\frac{D}{L} & \frac{D}{L} \end{bmatrix} \quad (9)$$

The first terms on the right of Eqs. (6) and (9) correspond to the conventional finite elements without gap, and these are easily calculated⁶. The second terms are due to the gap element. Equations (6) and (9) show that the magnetic field of a region containing gaps can be easily analyzed only by adding the simple terms.

4. ERROR OF THE GAP ELEMENT

The main causes of the error of the gap element are as follows:

(1) The boundaries between the gap and the steel are moved each other to the center of them as shown in Fig. 1. Therefore, the flux line passes through the different route compared with the actual one as shown in Fig. 2(a).

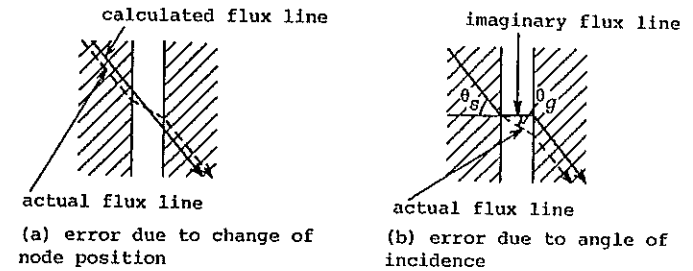


Fig. 2. Potential error.

(2) It is assumed that the angle of refraction θ_g is equal to 0° independently of the angle of incidence as shown in Fig. 2(b). However, the actual angle θ_g depends on the angle of incidence θ_s . When θ_s approaches 90° , the error due to this assumption cannot be neglected.

(3) In Fig. 2(b), the relation between the imaginary flux density B_g in the gap and the flux density B_s in the steel is denoted by the following equation.

$$B_g = B_s \cos \theta_s \quad (10)$$

The ratio of the imaginary energy ΔW_g in the gap to the actual energy W_g in the gap is obtained from Eqs. (3) and (10) as follows:

$$\frac{\Delta W_g}{W_g} = \frac{1}{v_g \cos^2 \theta_g} \quad (11)$$

Equation (11) shows that ΔW_g is not negligible compared with W_g when v_g/v_a is small or θ_g approaches 90° . Moreover, when the area of the gap is not negligibly small compared with that of the total region, ΔW_g cannot be neglected. In those cases, Eq. (2) must be used instead of Eq. (4).

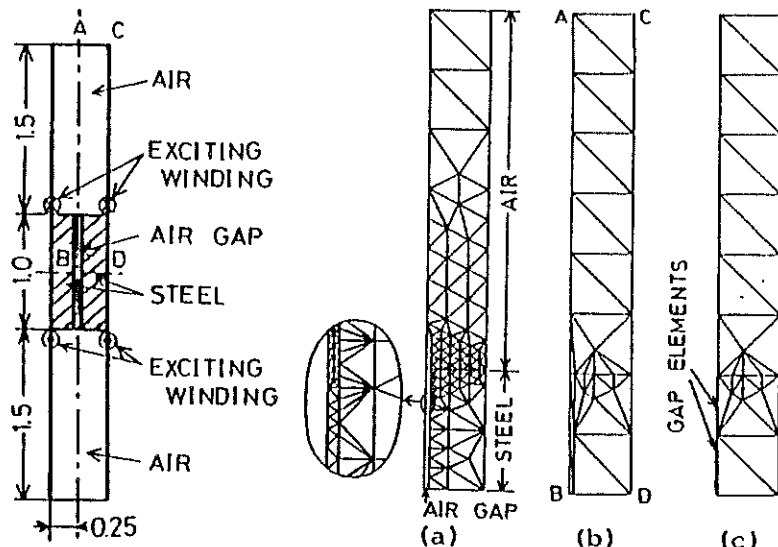


Fig. 3. Gap model to be investigated.

(a) small triangular elements
(b) flat triangular elements
(c) gap elements

Fig. 4. Various finite element subdivisions.

Figure 3 shows a model which is used to investigate the error caused by the gap element. As the flux distribution in this region is symmetrical, only a quarter of the region is subdivided into a set of finite elements as shown in Fig. 4. The natural boundary conditions are satisfied on the boundaries $A-B$ and $C-D$. The unknown equipotential condition¹ is satisfied on the boundary $A-C$, and the Dirichlet boundary condition on the boundary $B-D$. Three kinds of subdivisions are used to the air gap in Fig. 3 to compare the accuracy of vector potentials on each subdivision. Figure 4(a), (b) or (c) shows the subdivision each gap of which is divided into many small triangular elements, a few flat triangular elements or a few gap elements respectively. The gap length is normalized to 1 in all subdivisions. The ratio of the reluctivity of air to that of steel is fixed at ten thousand.

An error measure $E.M.$ defined by Eq. (12) is used to compare the errors.

$$E.M. = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{Nc} (A_i - A_{0i})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{Nc} A_{0i}^2}} \times 100 (\%) \quad (12)$$

Where A_{0i} is the vector potential obtained for the subdivision shown in Fig. 4(a). A_i is the vector potential obtained for the subdivision to be compared. The number of typical checking nodes Nc is 80. Figure 5 shows the effect of the gap width D on the error measure. The rate of flatness is defined as the ratio of the height to the base of the flat triangular element.

The main error of the flat triangular subdivision shown in Fig. 4(b) is caused by the ill-condition of the coefficient matrix. This error is especially serious when the gap width approaches zero.

The error measure of the gap element is smaller than that of the flat triangular element when the gap width is smaller than 0.004. If the allowable value of the error measure is within 1%, the gap element can be used practically under the condition that the gap width is smaller than 0.008 in this example.

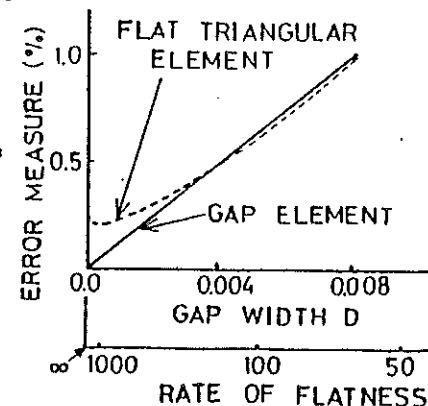


Fig. 5. Error measures of vector potential.

5. SOME EXAMPLES OF APPLICATION

In order to verify the usefulness of the gap element, a few computational trials are carried out.

5.1 Single-Phase, Two-Legged Transformer Core

The magnetizing currents of a single-phase, two-legged transformer core with butt joints shown in Fig. 6 are analyzed. The thick lines represent the joints of sheets. The core is made of grain-oriented silicon steel sheets (Grade: AISI-68, M-5) and they have extremely large anisotropy.

The waveshapes of the magnetizing currents i_m for two kinds of gap widths are shown in Fig. 7. The maximum flux density B_{leg} of the leg is equal to 1.7 T. K_1 is defined by the following equation.

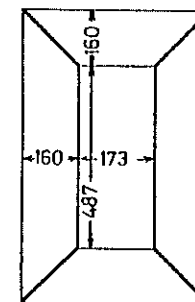
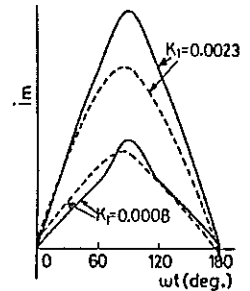


Fig. 6. Single-phase, two-legged transformer core.

$$K_1 = \frac{\text{gap width}}{\text{leg width}} \quad \text{----- (13)}$$

Figure 7 shows that the waveshape of the magnetizing current becomes sinusoidal when the gap width is increased. The broken lines show the experimental results as a comparison.

Zero time is taken to be the instant when the flux density of the leg is equal to zero. In our calculation, the magnetic hysteresis is neglected. Therefore, there is no phase difference between the flux and the magnetizing current. But the experimental results show some phase differences.



— calculated results
--- experimental results
Fig. 7. Magnetizing current waveshapes.

5.2 Single-Phase, Four-Legged Transformer Core⁴

The magnetic characteristics of a single-phase, four-legged transformer core shown in Fig. 8 are analyzed. The thick lines represent the joints of sheets. In this case, the joints are assumed to be butt joints. The flux densities of the inner leg, the yoke and the outer leg are denoted by b_{leg} , b_y and b_k respectively as shown in Fig. 8.

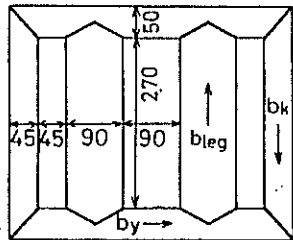


Fig. 8. Single-phase, four-legged transformer core.

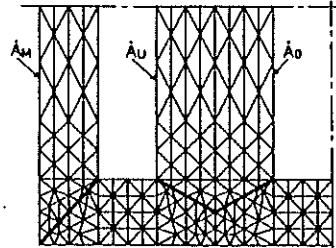


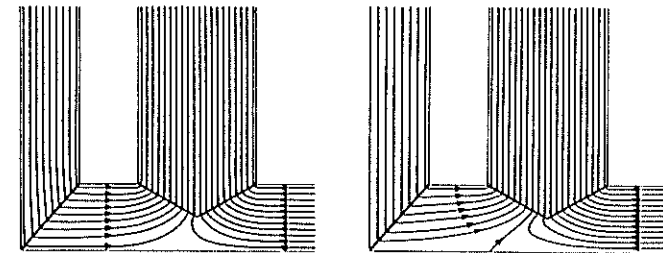
Fig. 9. Finite element subdivision.

As the flux distribution in this core is symmetrical, only a quarter of the core is subdivided into a set of finite elements as shown in Fig. 9. The thick lines denote the gap elements. The vector potentials $\hat{A}_0$ and $\hat{A}_U$ are the boundary values. $\hat{A}_M$ denotes the unknown equipotential boundary value¹. The natural boundary conditions are satisfied on the center lines denoted by chain lines.

The flux distributions at $wt = 90^\circ$ are shown in Fig. 10. K_2 is defined by the following equation.

$$K_2 = \frac{\text{gap width}}{\text{inner leg width}} \quad \text{----- (14)}$$

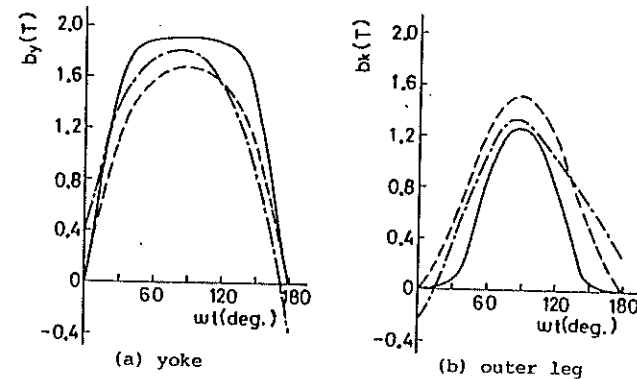
The influence of the gap width on the flux distribution can be seen by comparing Fig. 10(a) with (b).



(a) $K_2 = 0.0$

(b) $K_2 = 0.002$

Fig. 10. Flux distributions ($B_{leg} = 1.7$ T, $wt = 90^\circ$).

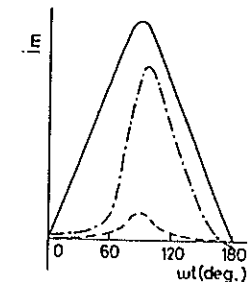


— $K_2 = 0.002$
--- $K_2 = 0.0$
-.- experimental results
} calculated results

Fig. 11. Flux density waveshapes ($B_{leg} = 1.7$ T).

The flux density waveshapes of b_y and b_k and the magnetizing current waveshapes i_m are shown in Figs. 11 and 12 respectively. Increasing the gap width, the maximum flux density in the yoke is increased and that in the outer leg is decreased as shown in Fig. 11. Because the magnetic characteristics of the core become nearly linear when the gap width becomes larger. Figure 12 shows that the gap width has a great influence on the magnetizing current i_m .

In Figs. 11 and 12, the experimental results are shown by chain lines as a reference. The



— $K_2 = 0.002$
--- $K_2 = 0.0$
-.- experimental results
} calculated results

Fig. 12. Magnetizing current waveshapes.

layers of the laminations of the measured transformer core are placed so that the gaps between lamination ends of one layer are overlapped by the lamination in the next layer. These figures show that a certain degree of gap should be taken into account to analyze the real transformer core by using the two-dimensional method.

5.3 Electromagnet

The attractive forces of an electromagnet shown in Fig. 13 are calculated by using the gap element. The core is made of permalloy.

As the flux distribution in the core is symmetrical, only a half of the core is subdivided into a set of finite elements as shown in Fig. 14. The thick line shows the gap elements. The Dirichlet boundary condition is applied on the boundary A-B-C-D-E-F and the natural boundary condition is satisfied on the boundary A-F.

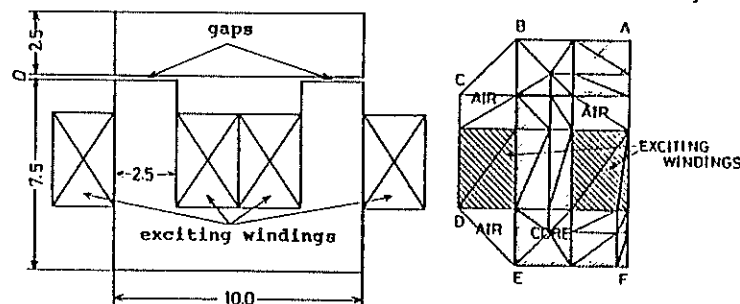


Fig. 13. Electromagnet.

Fig. 14. Finite element subdivision.

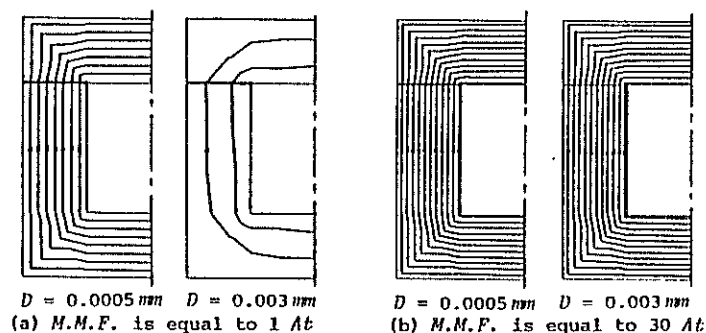


Fig. 15. Flux distributions in electromagnets.

Figure 15 shows the flux distributions in the cores having two kinds of gap width D for respective magnetomotive forces. Potential difference between two adjacent flux lines is 0.0002 wb/m . Figure 15(a) shows that the flux distributions are greatly affected by the gap width. On the contrary, when $M.M.F.$ becomes larger, the flux distributions are not so affected by the gap width as shown in Fig. 15 (b).

The characteristics of the attractive force are shown in Fig.

16. This figure shows that the attractive force is greatly affected by the gap width when the core is not saturated. These curves are easily obtained by using the gap element.

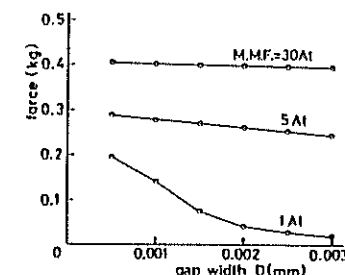


Fig. 16. Forces of electromagnet.

6. CONCLUSIONS

The investigated results of the gap element are summarized as follows:

- (1) The memory storage and the computing time can be considerably reduced compared with the conventional methods.
- (2) The program can be easily constructed by adding a few dozen steps to conventional programs.
- (3) The gap element is effective at the place where the ratio R of the gap width to its length is less than 0.008 under the condition that the relative permeability is equal to 10,000.
- (4) When R is less than 0.004, the solution obtained by using the gap element is more accurate than that obtained by using the flat triangular element.

As it is difficult to examine generally the error of the gap element, one example is discussed in detail in this paper. In future, the validity of our conclusions should be examined from more general viewpoints.

It is hoped that the range of application is enlarged by applying this element to the problems such as the analysis of magnetic fields in rotating machines and electric fields in high voltage apparatus. In high voltage apparatus, the gap element may be used at the cooling oil ducts. But our gap element cannot be applied directly to these problems without any modification. Because the potentials in electric fields must be the scalar ones. Moreover, the ratio of permittivity is not so large as that of reluctance. It is hoped that a new gap element which is suitable for the analysis of electric fields is conceived.

7. REFERENCES

1. T. Nakata, Y. Ishihara and N. Takahashi, Some Useful Techniques on Implementing the Finite Element Method for Computation of Electromagnetic Fields in Electrical Machinery. Proceedings of U.S.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, Ithaca, 1978.
2. T. Nakata, Analysis of Flux Distribution of Three-Phase, Three-Limbed Transformer Cores. Electrical Engineering in Japan, vol. 95, No. 3, 43-50, 1975.
3. T. Nakata, Y. Ishihara, K. Yamada and A. Sasano, Non-Linear Analysis of Rotating Flux in the T-Joint of a Three-Phase, Three-Limbed Transformer Core. Proceedings of EPS Soft Magnetic Materials 2 Conference, 4.5, '57-62, Cardiff, 1975.

4. T. Nakata, Y. Ishihara and N. Takahashi, Analysis on Magnetic Characteristics of Single-Phase Four-Limbed Transformer Cores. EPS Soft Magnetic Materials 3 Conference, 11.1, Bratislava, 1977.
5. T. Nakata, N. Takahashi and K. Yoneda, Numerical Analysis of Flux Distribution in Permanent-Magnet Stepping Motors. Intermag Conference, 14.2, Florence, 1978.
6. P. Silvester, H.S. Cabayan and B.T. Browne, Efficient Techniques for Finite Element Analysis of Electric Machines. IEEE Trans. PAS-92, 1274-1281, 1973.